

Durée : 4 heures

## Baccalauréat S Polynésie septembre 2004

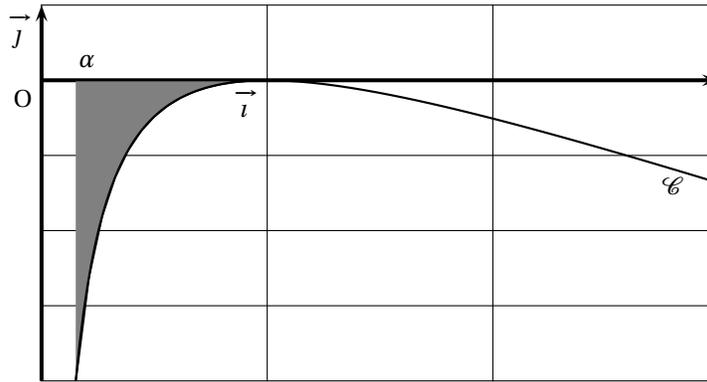
### EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

La courbe  $\mathcal{C}$  donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



- Montrer que  $f$  est dérivable et que, pour tout  $x$  strictement positif,  $f'(x)$  est du signe de
$$N(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x.]$$
  - Calculer  $N(1)$  et déterminer le signe de  $N(x)$  en distinguant les cas  $0 < x < 1$  et  $x > 1$ .
  - En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  et les coordonnées du point de  $\mathcal{C}$  d'ordonnée maximale.

- On note  $\mathcal{A}(\alpha)$  l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où  $\alpha$  désigne un réel de  $]0; 1[$ .

- Exprimer  $\mathcal{A}(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$  (on pourra utiliser une intégration par parties).
- Calculer la limite de  $\mathcal{A}(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

- On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par son premier terme  $u_0$  élément de  $[1; 2]$  et :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

- Démontrer, pour tout réel  $x$  élément de  $[1; 2]$ , la double inégalité
$$0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1.$$
  - Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  appartient à  $[1; 2]$ .
- En remarquant que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ , déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
  - Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.
    - Déterminer la valeur exacte de  $\ell$ .

**EXERCICE 2****5 points****(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$  on considère les points  $M'$  et  $M''$  d'affixes respectives

$$z' = z - 2 \quad \text{et} \quad z'' = z^2.$$

1.
  - a. Déterminer les points  $M$  pour lesquels  $M'' = M$ .
  - b. Déterminer les points  $M$  pour lesquels  $M'' = M'$ .
2. Montrer qu'il existe exactement deux points  $M_1$  et  $M_2$  dont les images  $M'_1, M''_1, M'_2$  et  $M''_2$  appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.
3. On pose  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.
  - a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe  $\frac{z'' - z}{z' - z}$ .
  - b. En déduire l'ensemble  $E$  des points  $M$  du plan pour lesquels les points  $M, M'$  et  $M''$  sont alignés. Représenter  $E$  graphiquement et en couleur.
4. On pose  $z = \sqrt{3}e^{i\theta}$  où  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
  - a. Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  d'affixe  $z$  ainsi définis et chacun des ensembles  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  des points  $M'$  et  $M''$  associés à  $M$ .
  - b. Représenter  $\Gamma, \Gamma'$  et  $\Gamma''$  sur la figure précédente.
  - c. Dans cette question  $\theta = \frac{\pi}{6}$ . Placer le point  $M_3$  obtenu pour cette valeur de  $\theta$ , et les points  $M'_3$  et  $M''_3$  qui lui sont associés. Montrer que le triangle  $M_3M'_3M''_3$  est rectangle. Est-il isocèle ?

**EXERCICE 2****5 points****(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives  $-1 + i, 3 + 2i$  et  $i\sqrt{2}$ .

1. On considère la transformation  $f$  du plan dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M' = f(M)$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} - 1 + i(1 + \sqrt{2}).$$

- a. Calculer les affixes des points  $A' = f(A)$  et  $C' = f(C)$ .
  - b. En déduire la nature de  $f$  et caractériser cette transformation.
  - c. Placer les points A, B et C puis construire le point  $B' = f(B)$ .
2.
    - a. Donner l'écriture complexe de l'homothétie  $h$  de centre A et de rapport  $\sqrt{2}$ .
    - b. Montrer que la composée  $g = f \circ h$  a pour écriture complexe  $z'' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$ .
  3.
    - a. Soit  $M_0$  le point d'affixe  $2 - 4i$ .  
Déterminer l'affixe du point  $M''_0 = g(M_0)$  puis vérifier que les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AM''_0}$  sont orthogonaux.

- b.** On considère un point  $M$  d'affixe  $z$ . On suppose que la partie réelle  $x$  et la partie imaginaire  $y$  de  $z$  sont des entiers.  
Démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM''}$  sont orthogonaux si, et seulement si  $5x + 3y = -2$ .
- c.** Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $5x + 3y = -2$ .
- d.** En déduire les points  $M$  dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle  $[-6; 6]$  tels que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM''}$  sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

**EXERCICE 3****6 points****Commun à tous les candidats**

On donne dans le plan trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  distincts non alignés.

Une urne  $U$  contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$  et  $3$ .

Une urne  $V$  contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre  $1$  et un carton le nombre  $-1$ .

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables.

On note  $a$  le nombre lu sur le canon de  $U$  et  $b$  celui lu sur le carton de  $V$ .

- 1.** Justifier que les points pondérés  $(A, a)$ ,  $(B, b)$  et  $(C, 4)$  admettent un barycentre. On le note  $G$ .
- 2.**
  - a.** Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :  
 $E_1$  «  $G$  appartient à la droite  $(BC)$  » ;  
 $E_2$  «  $G$  appartient au segment  $[BC]$  ».
  - b.** Montrer que la probabilité de l'évènement  $E_3$  : «  $G$  est situé à l'intérieur du triangle  $ABC$  et n'appartient à aucun des côtés » est égale à  $\frac{2}{5}$ . On pourra faire appel des considérations de signe.
- 3.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. On répète  $n$  fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes  $U$  et  $V$  puis à considérer le barycentre  $G$  de la question **1.**  
On désigne par  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement  $E_3$ .
  - a.** Déterminer l'entier  $n$  pour que l'espérance de la variable aléatoire  $X$  soit égale à  $4$ .
  - b.** Déterminer le plus petit entier  $n$  pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle  $ABC$  soit supérieure ou égale à  $0,999$ .