Durée : 4 heures

Baccalauréat S France juin 2004

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout entier naturel} \quad n. \end{array}\right.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

   b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n, en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1+\text{i})^6 = -8\text{i}$.
2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8\text{i}$.

   a. Déduire de **1.** une solution de l'équation (E).

   b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Déduire également de **1.** une solution de l'équation (E') $z^3 = -8\text{i}$.
4. On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

   b. Montrer que b et c sont solutions de (E$'$).
5. **a.** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

   b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

   c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

   $$(x-1)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right) = x^k - 1.$$

   Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.
2. **a.** Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$.
   Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs.
Montrer que : $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)\,a^d = a^d - 1$.
Montrer ensuite que a^d-1 est le pgcd de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 1/2 point l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne le point S(1 ; −2 ; 0) et le plan P d'équation $x+y-3z+4=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$\text{A} : \left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+t\\ y &=& 1-2t\\ z &=& -3\end{array}\right., t\in\mathbb{R} \quad \text{B} : \left\{\begin{array}{lll} x &=& 2+t\\ y &=& -1+t\\ z &=& 1-3t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$$

$$\text{C} : \left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+t\\ y &=& -2-2t\\ z &=& 3t\end{array}\right., t\in\mathbb{R} \quad \text{D} : \left\{\begin{array}{lll} x &=& 2+t\\ y &=& -1+t\\ z &=& -3-3t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$\text{A} : (-4\,;\,0\,;\,0) \quad \text{B} : \left(\frac{6}{5}\,;\,\frac{-9}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right) \quad \text{C} : \left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{-2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right) \quad \text{D} ; \left(\frac{8}{11}\,;\,\frac{-25}{11}\,;\,\frac{9}{11}\right)$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$\text{A} : \frac{\sqrt{11}}{3} \qquad \text{B} : \frac{3}{\sqrt{11}} \qquad \text{C} : \frac{9}{\sqrt{11}} \qquad \text{D} : \frac{9}{11}$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale

A : au point I(1 ; −5 ; 0)

B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

$$p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\ ;\ 200[) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure ? 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

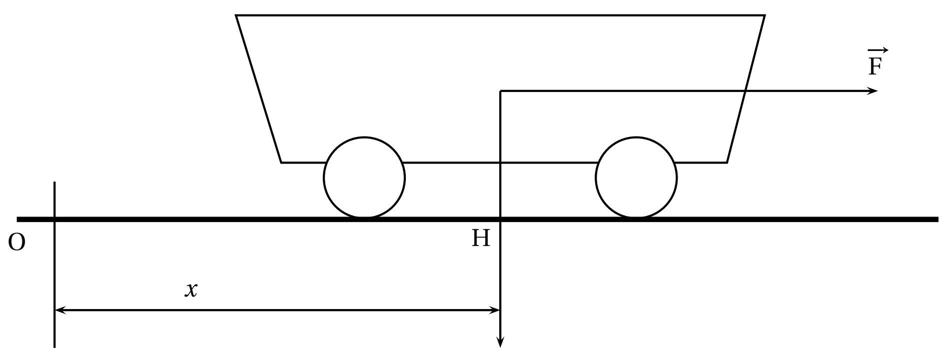
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

  a. Montrer que $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

  b. En déduire d_m on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale ? la semaine près.

Exercice 5 **4 points**

Commun à tous les candidats



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles ? la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.

La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H ? l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$\text{(E)} \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,

x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $\quad v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
   a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
   b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{-t/8}$.
3. Calculer $\mathrm{V} = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale ? 90 % de sa valeur limite V ?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.