

∞ Baccalauréat S Polynésie spécialité ∞
septembre 2003

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit s un nombre réel. On donne les points $A(8; 0; 8)$, $B(10; 3; 10)$ ainsi que la droite \mathcal{D} d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases}$$

1.
 - a. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B .
 - b. Démontrer que \mathcal{D} et Δ sont non coplanaires.
2.
 - a. Le plan \mathcal{P} est parallèle à \mathcal{D} et contient Δ . Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal à \mathcal{P} . Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{P} .
 - b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de \mathcal{D} à \mathcal{P} est indépendante de M .
 - c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de \mathcal{P} avec le plan (xOy) .
3. La sphère \mathcal{S} est tangente à \mathcal{P} au point $C(10; 1; 6)$. Le centre Ω de \mathcal{S} se trouve à la distance $d = 6$ de \mathcal{P} , du même côté que O .
Donner l'équation cartésienne de \mathcal{S} .

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n .
4.
 - a. Soient a , b et c trois entiers naturels.
Démontrer que si a divise c et b divise c , avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c .
 - b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n .
5. Existe-t-il quinze nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

PROBLÈME

10 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(x) &= \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

1.
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
 - b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2.
 - a. Étudier la dérivabilité de f en 0.
 - b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, f' désignant la fonction dérivée de f .
3. Étudier le sens de variations de f sur $]0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente \mathcal{D} à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 1$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g . Étudier le sens de variations de g' . En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - b. Étudier le sens de variations de g .
En déduire la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la tangente \mathcal{D} .
3. Construire la courbe \mathcal{C} et la tangente \mathcal{D} (unité graphique : 2 cm).

Partie C

1. n est un entier naturel non nul.
Exprimer en fonction de n le réel $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x \, dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. En déduire en fonction de l'entier n , l'aire \mathcal{A}_n exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe \mathcal{C} , la tangente \mathcal{D} et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.