Baccalauréat Amérique du Sud série S novembre 2003

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement $-1,\ 0,\ 0,\ 1$ et indiscernables au toucher.

On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ le point M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$.

Sur le graphique joint en annexe page 6, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On note $\mathcal{C}$ le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\dfrac{1}{64}$.
2. On note E_1 l'évènement : « M appartient à l'axe des abscisses ».

   Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\dfrac{1}{4}$.
3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}\ (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

   a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

   b. Tracer en couleur sur le graphique de la page 5, la section du plan $\mathcal{P}$ et du cube $\mathcal{C}$. (On ne demande pas de justification).

   c. On note E_2 l'évènement : « M appartient à $\mathcal{P}$ ».

   Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?
4. On désigne par $\mathcal{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{O}M \leqslant 1,5$).

   On note E_3 l'évènement : « M appartient à la boule $\mathcal{B}$ ».

   Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repèère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 4 cm).

Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω.

Partie I

On pose $a_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathcal{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\text{i}$, et B$'$ le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.

   a. Calculer b'.

   b. Démontrer que le triangle OBB$'$ est rectangle en B$'$.

Partie II

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.

À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.

   a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.

   b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'\mathrm{O}}, \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) + 2k\pi \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z})$.

   c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé de O et de I.

2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O.
   On note x son affixe.
   On choisit a de manière que A soit un point de $\mathscr{C}$ différent de I et de O.
   Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).
   En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.
2. Soit I le point d'affixe 1.
   On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.
   Sa position initiale est en I.
   On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathscr{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).
   On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\dfrac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\dfrac{\pi}{5}$ cm).
   Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathscr{C}$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2. On pose :
   $S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),
   $S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul),
   et $f = S'_n s_1 \circ S_m$.

   a. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\dfrac{\pi}{3} + n\dfrac{6\pi}{5}$.

b. f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?

c. On appelle M le point d'affixe 6 et M$'$ son image par f.
Peut-on avoir OM$'$ = 240 ?
Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique $(m,\ n)$ tel que OM$'$ = 576.
Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\text{OM}'}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^x$.
3. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0,\ +\infty[$.
4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^x}$.
   Sur l'annexe de la page 7 sont tracées, dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$les courbes représentatives de g et h, notées respectivement Γ_1 et Γ_2.
   a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
   b. Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, Γ_1, et Γ_2 ?
   Tracer Γ sur l'annexe de la page 7, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de (I_n), et donner une interprétation géométrique de (I_n).
2. **a.** Démontrer, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$.
   b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
   c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente et determiner sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $J_n = \displaystyle\int_0^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question **A. 4. a.**, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right) \leqslant J_n \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-n} \leqslant 1.$$

2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
   En déduire qu'elle converge.

3. On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :

« Si $u_n,\ v_n$ et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives $a,\ b$ et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout $n,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $a \leqslant b \leqslant c$ ».

Donner un encadrement de L.

4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$.

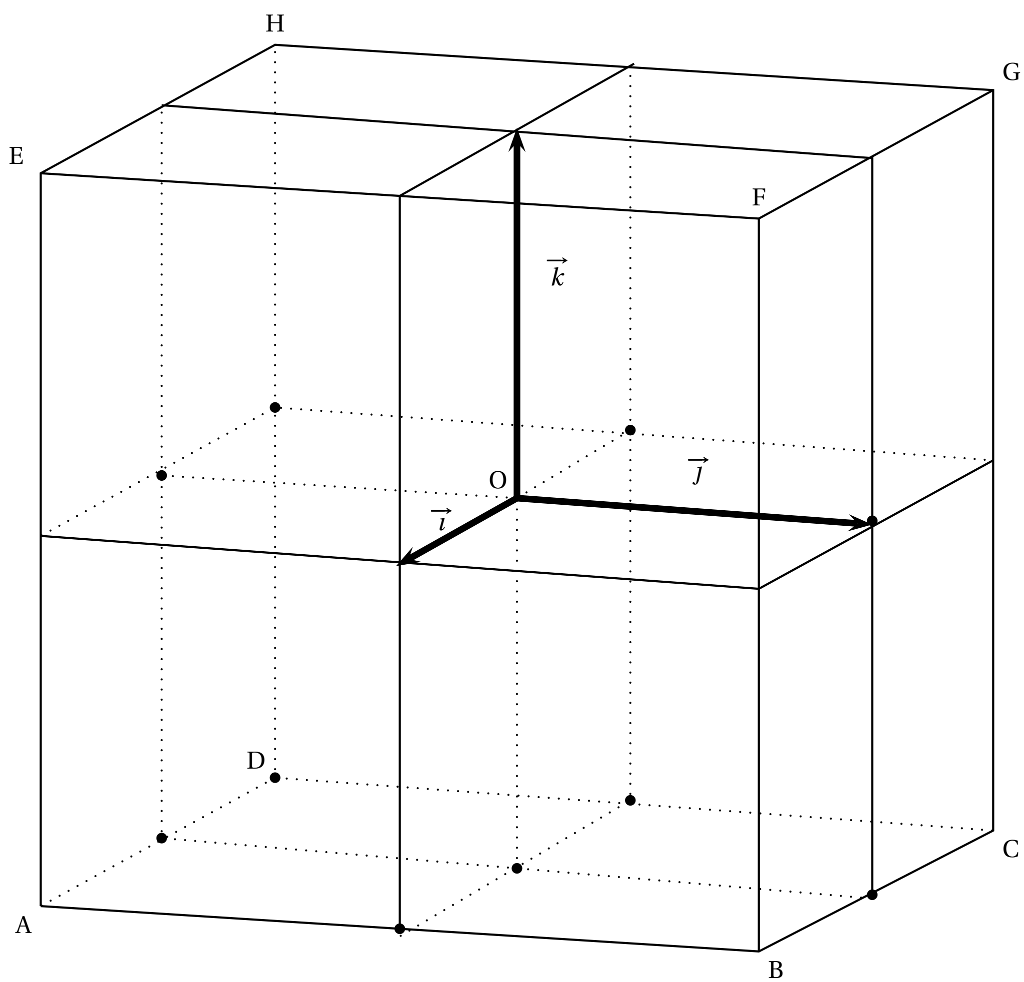
a. Démontrer que, pour tout réel $x,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+1}$.

b. Démontrer que, pour tout réel $x,\ f$ est la dérivée de la fonction $x \longmapsto v\left(\mathrm{e}^x\right)$.

c. En déduire la valeur exacte de L.

Annexe de l'exercice 1

Cette page sera complétée et remise avec la copie



Annexe du problème

Cette page sera complétée et remise avec la copie