Durée : 4 heures

∾ Corrigé du baccalauréat S La Réunion ∾ 15 juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

$f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

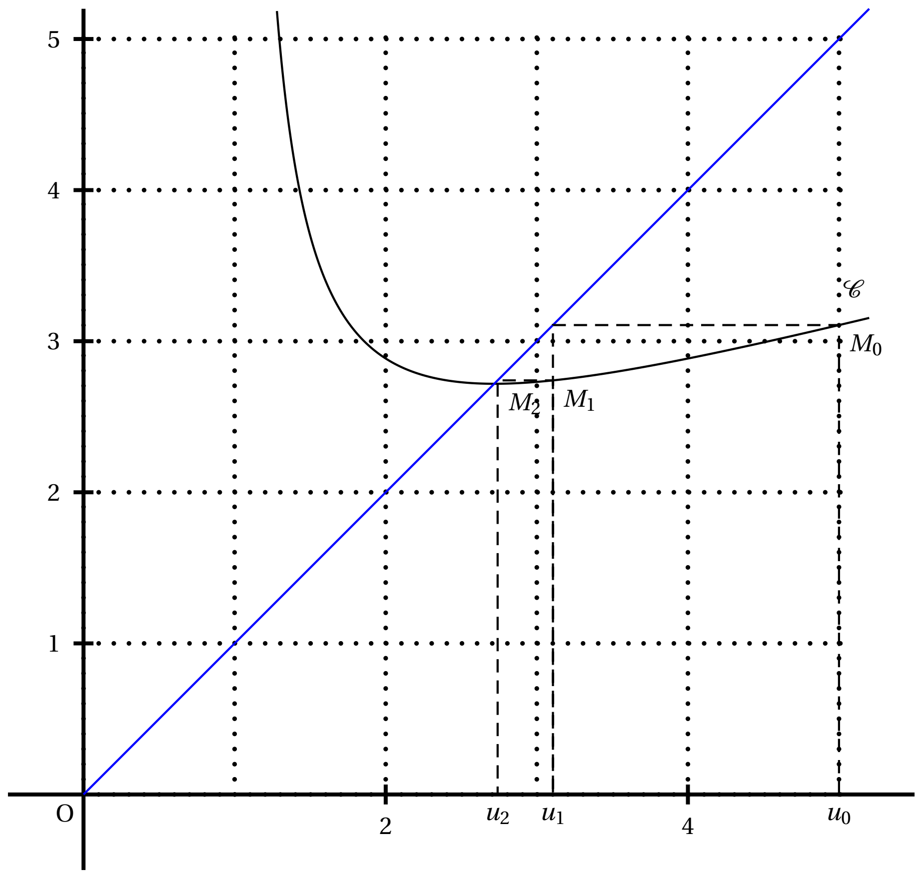
1. **a.** Comme $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0_+$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$.

   b. f quotient de fonctions dérivables, celle du dénominateur ne s'annulant pas, est dérivable et $f'(x) = \dfrac{\ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ qui est du signe de $\ln x - 1$.

   Des propriétés de la fonction ln, on en déduit que $\ln \mathrm{e} = 1$ et comme cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit le signe de la dérivée et le tableau de variations suivant :

x	1		e		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$



2. **a.**

La suite semble converger « rapidement ».

b. On a $u_0 = 5 \geqslant \text{e}$. Pour $n > 0$, u_n est une image par f d'un réel. D'après le tableau de variations ci-dessus, $f(x) \geqslant \text{e} \Longrightarrow u_n \geqslant \text{e}$.

c. On calcule $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \dfrac{u_n(1 - \ln u_n)}{\ln u_n}$.
On vient de voir que $u_n \geqslant \text{e} > 1 \Longrightarrow \ln u_n > 0$. La différence est donc du signe de $1 - \ln u_n$ qui est négative d'après la question 1 b.
$u_{n+1} - u_n < 0 \iff (u_n)$ est une suite décroissante. C'est une suite décroissante et minorée par e : elle converge vers une limite $\ell \geqslant \text{e}$.

Partie B

1. Or l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ donne à la limite $\ell = f(\ell)$, car la fonction f est continue sur $]1 ; +\infty[$.

2. $\ell = f(\ell) \iff \ell = \dfrac{\ell}{\ln \ell} \iff$ (car $\ell \neq 0$), $1 = \dfrac{1}{\ln \ell} \iff \ln \ell = 1 \iff \ell = \text{e}$.
La suite converge vers e.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Première partie

En intégrant par parties avec :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = \mathrm{e}^x \\ u'(x) = 1 & v(x) = \mathrm{e}^x \end{array}$$

Les fonctions u et v étant dérivables et les fonctions u' et v' continues, on obtient :
$\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \left[\mathrm{e}^x(x-1)\right]_0^1 = 0 - 1\times(-1) = 1.$

Deuxième partie

1. L'aire de la partie A est en unités d'aire l'intégrale calculée ci-dessus soit 1.
l'aire du rectangle est e donc par différence l'aire de la partie B est $\mathrm{e}-1$.
On sait que le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

	A	B	Total
aire	1	$\mathrm{e}-1$	e
Probabilité			$\dfrac{1}{2}$

On en déduit aussitôt que la probabilité d'atteindre la partie A est $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ et que la probabilité d'atteindre la partie B est $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}}$.

2. **a.** On effectue trois fois la même expérience aléatoire avec comme succès : « atteindre la partie A » de probabilité $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ et comme échec : « rater la partie A ». On a donc une loi de Bernouilli de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.
L'espérance est $\mathrm{E}(X) = n\times p = 3\times\dfrac{1}{2\mathrm{e}} = \dfrac{3}{2\mathrm{e}} \approx 0{,}552$.

b. On a $p(\mathrm{E}) = p(X=2) = \binom{3}{2}\left(\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)^2 \times \left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right) = \dfrac{3\times1\times(2\mathrm{e}-1)}{8\hat{\mathrm{e}}^3} \approx 0{,}083$à 10^{-3} par excès.

c. On considère de même la loi de Bernouilli de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}}$.
On sait que $p(F) = \binom{3}{3}\times\left(\dfrac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}}\right)^3 = \dfrac{(\mathrm{e}-1)^3}{8\mathrm{e}^3}$.

d. Soit G l'évènement : « les trois fléchettes ont atteint la partie A ou la partie B ». $p(G = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

On sait que $p_{\mathrm{G}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})}{p(\mathrm{G})} = \dfrac{p(\mathrm{F})}{p(\mathrm{G})} = \dfrac{\frac{(\mathrm{e}-1)^3}{8\mathrm{e}^3}}{\frac{1}{8}} = \dfrac{(\mathrm{e}-1)^3}{\mathrm{e}^3} \approx 0{,}253$.

3. **a.** On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0)$.
$p(X=0) = \binom{n}{0}\left(\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)^0 \times \left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)^n$.
Finalement : $p(X\geqslant 1) = 1 - \left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)^n$.

b. $p_n \geqslant 0{,}99 \iff 1-\left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)^n \geqslant 0{,}99 \iff \left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)^n \leqslant 0{,}01 \iff$
$n\ln\left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right) \leqslant \ln 0{,}01 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln\left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)}$, (puisque $\ln\left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right) < 0$).

D'où finalement, puisque $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln\left(1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)} \approx 22{,}7$, le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0{,}99$ est l'entier 23.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\dfrac{z-4}{z} = \mathrm{i} \iff z-4 = \mathrm{i}z \iff z(1-\mathrm{i}) = 4 \iff z = \dfrac{4}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{4(1+\mathrm{i}}{1+1} = 2+2\mathrm{i}.$
   $S = \{2+2\mathrm{i}\}$

2. $z^2-2z+4 = 0 \iff (z-1)^2-1+4 = 0 \iff (z-1)^2 = -3 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & 1+\mathrm{i}\sqrt{3}\\ z_2 & = & 1-\mathrm{i}\sqrt{3}\end{array}\right.$
   $S = \{1+\mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ 1-\mathrm{i}\sqrt{3}\}$.
   $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2 \Longrightarrow z_1 = 2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et comme $z_2 = \overline{z_1} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

3. En interprétant l'égalité de la question 1 obtenue avec l'affixe de D (modules et arguments égaux) :
   $\dfrac{z-4}{z} = \mathrm{i} \iff \dfrac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{O}}} = \mathrm{i} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{BD} & = & \mathrm{OD}\\ \left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}\, ,\, \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) & = & \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$ Autrement dit le triangle OBD est isocèle, rectangle en D.

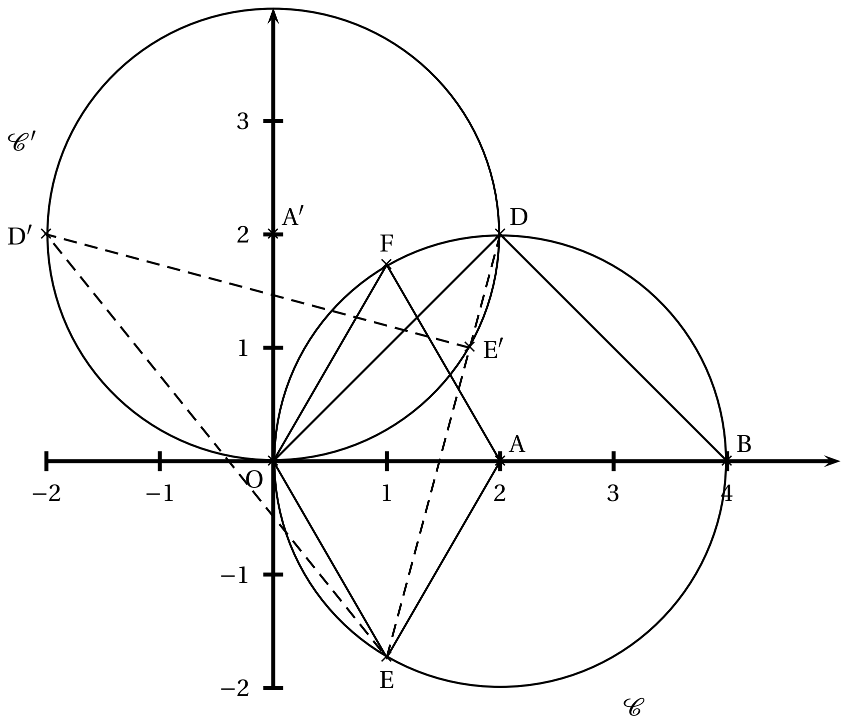
4. On remarque que z_{E} et z_{F} sont les solutions de l'équation de la question 2. Donc :
   $\left\{\begin{array}{lcl} z_{\mathrm{E}}^2-2z_{\mathrm{E}}+4 & = & 0\\ z_{\mathrm{F}}^2-2z_{\mathrm{F}}+4 & = & 0\end{array}\right. \Longrightarrow z_{\mathrm{E}}^2-z_{\mathrm{F}}-2z_{\mathrm{E}}+2z_{\mathrm{F}} = 0 \iff (z_{\mathrm{E}}-z_{\mathrm{F}})(z_{\mathrm{E}}+z_{\mathrm{F}}-2) = 0 \iff z_{\mathrm{E}}+z_{\mathrm{F}} = 2 = z_{\mathrm{A}} \iff$ OEAF est un parallélogramme.
   De plus on sait que $|z_{\mathrm{E}}| = |z_{\mathrm{F}}| = 2$. Conclusion : OEAF est un losange.

5. **a.** Si $M(z)$ a pour image $M'(z')$ dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, alors $z' = \mathrm{i}z$. Donc$z_{\mathrm{E'}} = \mathrm{i}(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = \sqrt{3}+\mathrm{i}$.

   b. $\mathrm{AE'} = \left|z_{\mathrm{E'}}-z_{\mathrm{A}}\right| = \left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right| = \sqrt{3+1} = 2$. Donc E′ appartient bien au cercle $\mathscr{C}'$.

   c. On calcule $e'-d = \sqrt{3}+\mathrm{i}-2-2\mathrm{i} = \sqrt{3}-2-\mathrm{i}$. Donc $(\sqrt{3}+2)(e'-d) = (\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2-\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}(\sqrt{3}+2)$.
   D'autre part $e-d = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}-2-2\mathrm{i} = -1-\mathrm{i}(\sqrt{3}+2)$.
   Conclusion : $e-d = (\sqrt{3}+2)(e'-d)$. Cette égalité s'écrit vectoriellement : $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = (\sqrt{3}+2)\overrightarrow{\mathrm{DE'}} \iff \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DE'}}$ sont colinéaires ou encore E appartient à la droite (DE′) ou encore E, E′ et D sont alignés.

6. Dans la rotation, la droite (ED) ou encore d'après la question précédente la droite (EE′) a pour image la droite perpendiculaire (E′D′) : donc le triangle EE′D′ est rectangle en E′.



EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Avec $s(\text{A}) = \text{I}$ et $s(\text{B}) = \text{J}$, le rapport de la similitude est $\dfrac{\text{IJ}}{\text{AB}} = \dfrac{1}{2}$.
   De même l'angle de la similitude està 2π près $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{IJ}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$.
2. Si Ω est le centre de la simitude, $\left(\overrightarrow{\Omega\text{A}}, \overrightarrow{\Omega\text{I}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$ et de même $\left(\overrightarrow{\Omega\text{B}}, \overrightarrow{\Omega\text{J}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$, donc Ω appartient au cercle Γ_1 et au cercle Γ_2, donc Ω est l'un des deux points communs à ce cercle.
3. L'image de la droite (BC) est la droite contenant J (image par s de B) et perpendiculaire à (BC), d'après l'angle de la similitude : c'est donc la droite (CD).
   Donc C′ image de C par s appartient à la droite (CD) etcomme$s$(B = J et $s(\text{C}) = \text{C}'$, $\text{JC}' = \dfrac{1}{2}\text{BC} = \dfrac{1}{2}\text{CD}$. Donc on a $\text{C}' = \text{C}$ ou $\text{C}' = \text{D}$. Comme C n'est pas le point invariant de la similitude soit Ω, $\text{C}' = \text{D}$.
   Il en résulte que puisque I milieu de [AC], alors son image K par s est le milieu du segment image [ID].
4. **a.** $s = h \circ h$ composée de deux similitudes de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est une similitude de même centre Ω, de rapport $\dfrac{1}{4}$ et d'angle π, soit une homothétie de rapport $-\dfrac{1}{4}$.

   b. $s(\text{A}) = h\,[h(\text{A})] = h(\text{I}) = \text{K}$. Dans une homothétie un point, son image et le centre sont alignés, donc A, K et Ω sont alignés.

Partie B

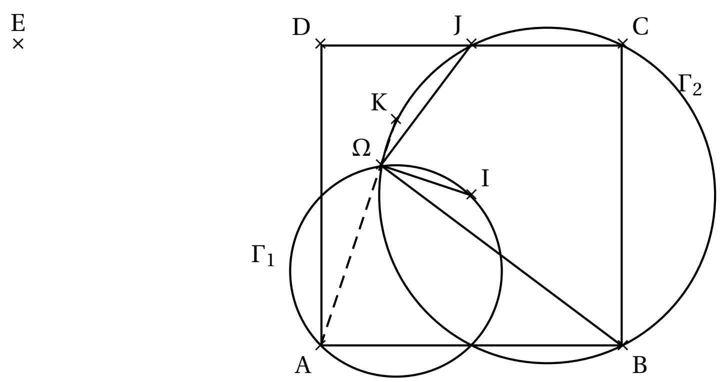
1. I a pour affixe $1+\mathrm{i}$ et J a pour affixe $1+2\mathrm{i}$.

L'écriture complexe d'une similitude directe est $z' = az+b$. On a donc : $\left\{\begin{array}{lll} 1+\mathrm{i} & = & a\times 0+b \\ 1+2\mathrm{i} & = & a\times 2+b \end{array}\right. \Longrightarrow$ $\mathrm{i} = 2a \iff a = \dfrac{\mathrm{i}}{2}$ et $b = 1+\mathrm{i}$.

L'écriture de la similitude est donc : $z' = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$.

2. Ω d'affixe ω invariant par $s \iff \omega = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\omega + 1 + \mathrm{i} \iff \omega\left(1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 1+\mathrm{i} \iff \omega =$ $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{1-\frac{1}{2}+\mathrm{i}(1+\dfrac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{2+6\mathrm{i}}{5}$.

3. Soit e l'affixe de E ; on a $0 = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}e + 1 + \mathrm{i} \iff \dfrac{1}{2}\mathrm{i}e = -1-\mathrm{i} \iff e = \dfrac{-1-\mathrm{i}}{\dfrac{1}{2}\mathrm{i}} =$ $\dfrac{-\mathrm{i}+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -2+2\mathrm{i}$.



EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

1.

a. On a $d(\mathrm{O}\,;\,\mathscr{P}) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{29}}$ Faux

b. Vrai

c. Vrai : le vecteur $2\overrightarrow{n}\,(2\,;\,3\,;\,4)$ est un vecteur normal au plan.

d. Le vecteur $\overrightarrow{p}\,(-5\,;\,2\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{Q}$. Et $2\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{p} = -10++6+4 = 0$. Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans ne sont pas parallèles mais perpendiculaires. Faux

2.

a. P admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 2-4+2 = 0$. Ces vecteurs sont orthogonaux donc la droite est bien parallèle au plan. Vrai

b. Faux car $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires.

c. On sait que D est parallèle au plan. $\mathrm{A}\in P \iff 2+1-1=0$ est une égalité fausse, donc la droite D n'est pas incluse dans le plan. Faux

d. Le système proposé est bien la traduction de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \alpha\overrightarrow{u}$. Vrai

3. **a.** Les deux plans ont pour vecteurs respectifs normaux $\overrightarrow{v}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{w}\,(1\,;\,0\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = 1-1=0$. Les deux plans sont orthogonaux, leur intersection est donc une droite. Faux

b. On a effectivement $1+1+1=3$ et $2-1=1$, donc l'ensemble E est bien une droite contenant A. Vrai

c. Faux

d. $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z &=& 3\\ 2x-z &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y &=& 3-z\\ 2x &=& 1+z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y &=& 3-z\\ x &=& \dfrac{1+z}{2}\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} y &=& \dfrac{5-3z}{2}\\ x &=& \dfrac{1+z}{2}\end{array}\right.$

L'ensemble des points de E est donc l'ensemble des points de coordonnées $\left(\dfrac{1+z}{2}\,;\,\dfrac{5-3z}{2}\,;\,z\right)$. L'équation paramétrique de cette droite est donc :

$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}z\\ y &=& \dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}z\\ z &=& z\end{array}\right.$ En posant $z=2t$, on obtient le système :

$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{1}{2}+t\\ y &=& \dfrac{5}{2}-3t\\ z &=& 0+2t\end{array}\right.$ Cette équation est celle de la droite contenant $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$

et de vecteur directeur $(1\,;\,-3\,;\,2)$. Vrai

4. **a.** Faux (difficile à justifier)

b. (AH) est orthogonale à (BC) donc appartient aussi au plan P. Vrai

c. $\overrightarrow{\mathrm{B}M}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{B}M}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}M}=0$.
L'ensemble des points M est donc le plan contenant A et orthogonal à (BC) : c'est bien le plan P. Vrai

d. Faux : La face (ABC) étant quelconque la hauteur [AH] n'est pas la médiane relative à [BC].