

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2005

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

Partie A Restitution organisée de connaissances

En fait la démonstration n'en n'est pas une puisque tous les éléments de la démonstration sont donnés dans les prérequis.

Partie B

1. VRAI : $z^2 = -\frac{1}{2}i$, et $z^4 = (z^2)^2 = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$.
2. FAUX : si $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$ et $|z + \bar{z}| = 0 \iff 2a = 0 \iff a = 0$. Donc tous les imaginaires de la forme bi avec $b \neq 0$ vérifient la relation sans être nuls.
3. VRAI : $z + \frac{1}{z} = 0 \iff \frac{z^2 + 1}{z} = 0 \iff z^2 + 1 = 0 (z \neq 0) \iff (z+i)(z-i) = 0 \iff z = -i$ ou $z = i$.
4. FAUX : Si $z = 1$ et $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $z + z' = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z| = 1$ et $|z + z'| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$ et $z' \neq 0$.

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. Si p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique de raison r , alors $p_2 = p_1 + r$, $p_3 = p_1 + 2r$ et $p_4 = p_1 + 3r$. On a donc :

$$\begin{cases} p_4 & = p_1 + 3r = 0,4 \\ p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r & = 1 \text{ (loi des probabilités totales)} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} p_1 + 3r & = 0,4 \\ 4p_1 + 6r & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2p_1 + 6r & = 0,8 \\ 4p_1 + 6r & = 1 \end{cases} \implies 2p_1 = 0,2 \iff p_1 = 0,1.$$

On en déduit aussitôt que $r = 0,1$ et finalement :

$$p_1 = 0,1, p_2 = 0,2, p_3 = 0,3, p_4 = 0,4.$$

2. **a.** La probabilité d'obtenir dans l'ordre 1, 2, 4 est $p_{124} = 0,1 \times 0,2 \times 0,4 = 0,008$.
b. Les tirages donnant trois nombres distincts croissants sont : (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4) et (2, 3, 4). La probabilité d'avoir l'un de ces tirages est donc :

$$p_1 \times p_2 \times p_3 + p_1 \times p_2 \times p_4 + p_2 \times p_3 \times p_4 + p_2 \times p_3 \times p_4 = 0,006 + 0,008 + 0,012 + 0,024 = 0,05.$$

3. **a.** On a un schéma de Bernoulli avec $n = 10$ et $p_4 = 0,4$. On sait que la probabilité d'obtenir i fois le chiffre 4 est (pour $0 \leq i \leq 10$) :

$$p(X = i) = \binom{10}{i} 0,4^i (1 - 0,4)^{10-i} = \binom{10}{i} 0,4^i 0,6^{10-i}.$$

b. On a $E(X) = \sum_{i=0}^{10} i \times p(X=i) = \sum_{i=0}^{10} i \times \binom{10}{i} 0,4^i 0,6^{10-i} = 4$.

Cela signifie que sur un grand nombre de tirages le 4 sortira en moyenne 4 fois sur 10.

c. On a $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$. Or $p(X=0) = 0,6^{10}$.

Donc $p(X \geq 1) = 1 - 0,6^{10} \approx 0,9939 \approx 0,994$, soit à peu près 994 chances sur 1 000 d'obtenir au moins une fois le 4 en 10 tirages.

4. a. La probabilité d'obtenir $n-1$ fois un autre chiffre que le 4 et ensuite le 4 au n^{e} tirage est :

$$U_n = 0,6^{n-1} \times 0,4.$$

Cette suite est une suite géométrique de premier terme $U_1 = 0,4$ et de raison $0,6$. Comme $-1 < 0,6 < 1$, cette suite converge vers 0.

b. $S_n = 0,4 \times 0,6^0 + 0,4 \times 0,6^1 + \dots + 0,4 \times 0,6^{n-1} = 0,4 \times \frac{1-0,6^n}{1-0,6} = 1 - 0,6^n$.

On a de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

c. On a $S_n > 0,999 \iff 1 - 0,6^n > 0,999 \iff 0,6^n < 0,001 \iff$

$$n \ln 0,6 < \ln 0,001 \quad \text{par croissance de la fonction } \ln \iff n > \frac{\ln 0,001}{\ln 0,6}$$

car $\ln 0,6 < 0$. Comme $\frac{\ln 0,001}{\ln 0,6} \approx 13,5$, il faut donc faire 14 tirages.

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A. Quelques exemples

- $4 \equiv 1 \pmod{3}$, donc $4^n \equiv 1^n \pmod{3}$ et finalement $4^n \equiv 1 \pmod{3}$.
- 4 est premier avec 29 (29 est premier). Donc d'après le petit théorème de Fermat $4^{29-1} - 1 \equiv 0 \pmod{29}$ ou encore $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
- $4 = 0 \times 17 + 4$;
 $4^2 = 0 \times 17 + 16$;
 $4^3 = 3 \times 17 + 13$;
 $4^4 = 15 \times 17 + 1$.
 La dernière égalité montre que $4^4 \equiv 1 \pmod{17}$, d'où $(4^4)^k \equiv 1^k \pmod{17}$ soit $4^{4k} \equiv 1 \pmod{17}$ ou encore $4^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$.
 Conclusion : $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
- On a $4^2 = 16 = 3 \times 5 + 1$ ou $4^2 \equiv 1 \pmod{5}$ d'où il résulte que $4^{2k} \equiv 1 \pmod{5}$ ou encore $4^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$.
 Conclusion : $4^n - 1$ est divisible par 5 si n est pair.
 Par contre : de $4 \equiv 4 \pmod{5}$ et $4^{2k} \equiv 1 \pmod{5}$ il résulte par produit que $4^{2k+1} \equiv 4 \pmod{5}$.
 Conclusion : $4^n - 1$ est divisible par 5 si et seulement si n est pair.
- Diviseurs premiers de $4^{28} - 1$: la question 2 a déjà donné le nombre 29 ; la question 3 a donné le diviseur premier 17 ; la question 4 a donné le diviseur 5. D'autre part, $4 \equiv 1 \pmod{3}$ entraîne $4^n \equiv 1 \pmod{3}$ ou encore $4^n - 1$ est divisible par 3 qui est premier. Il y a également 5, 43 ...

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

- $4 = 2^2$; si p est premier différent de 2, il est premier avec 4, donc d'après le petit théorème de Fermat $4^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ou $4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Le premier premier différent de 2 est 3, donc $n = p - 1 \geq 1$.

2. a. On a donc : $4^n \equiv 1 \pmod{p}$, $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ et $n = bq + r$ avec $r < b$. On déduit de la seconde congruence que $4^{bq} \equiv 1 \pmod{p}$ et par quotient avec $4^{bq+r} \equiv 1 \pmod{p}$ que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$. Or b étant le plus petit naturel vérifiant $4^b \equiv 1 \pmod{p}$, il en résulte que $4^r = 1$ ou encore $r = 0$.
- b. On vient démontrer dans la question précédente que si $4^n \equiv 1 \pmod{p}$, alors n est multiple de b , b étant le plus naturel positif tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$.
Inversement si $n = kb$, de $4^b \equiv 1 \pmod{p}$, on déduit que $(4^b)^k \equiv 1^k \pmod{p}$ soit $4^n \equiv 1 \pmod{p}$. L'équivalence est donc démontrée.
- c. D'après la question B. 1 $4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et soit b le plus petit entier tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$. D'après la question 2. b. il en résulte que $p - 1$ est multiple de b ou encore b (non nul) divise $p - 1$.

EXERCICE 3

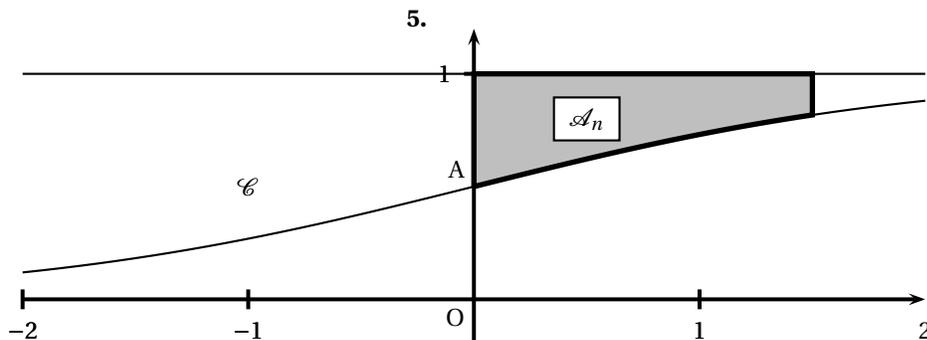
6 points

Commun à tous les candidats

Partie A Étude de la fonction f

1. On sait que $e^x \neq 0$, quel que soit le réel x ; $f(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$.
2. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Interprétation graphique : l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini à \mathcal{C} .
De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Interprétation graphique : la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini à \mathcal{C} .
3. f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur \mathbb{R} .
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , $f'(x) > 0$ sur \mathbb{R} . Donc la fonction f est croissante sur \mathbb{R} (de 0 à 1).
4. Il en résulte le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	0	\nearrow $1/2$	\nearrow 1



Partie B

1. Quel que soit le réel x , en utilisant A. 1.

$$f(x) + f(-x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1.$$

Le milieu du segment $[MM']$ est donc le point A de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, et ce point est un centre de symétrie pour la courbe \mathcal{C} .

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$; on sait d'après la partie A que $f(x) > 0$. Donc, l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$ est l'intégrale $\int_0^n f(x) dx$.

Donc par différence avec l'aire du rectangle de côtés 1 et n ,

$$\mathcal{A}_n = \int_0^n (1 - f(x)) dx = \int_0^n \left(1 - \frac{1}{1 + e^x}\right) dx = \int_0^n \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(1 + e^x)]_0^n = \ln 2 - \ln(1 + e^{-n}),$$

en utilisant les questions A. 1 et B. 1 (symétrie autour de A).

- b. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ donc par continuité de la fonction \ln ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-n}) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \ln 2.$$

Partie C

1. Si pour tout x réel $\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2}$, alors $\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} - \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2} \iff \frac{e^{2x} - be^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} \iff \frac{e^x(e^x - b)}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} \implies a = 1$ et $b = -1$.

2. On a pour tout λ positif, $\mathcal{V}(\lambda) = \int_{-\lambda}^0 \pi \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} dx = \pi \int_{-\lambda}^0 \frac{e^x}{e^x + 1} dx - \pi \int_{-\lambda}^0 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \pi \left[\ln(1 + e^x) + \frac{1}{e^x + 1} \right]_{-\lambda}^0 = \pi \left(\ln 2 + \frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-\lambda}) - \frac{1}{1 + e^{-\lambda}} \right)$.

3. On a toujours $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ et par continuité de la fonction \ln ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-n}) = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\lambda) = \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

EXERCICE 4**6 points****Partie A**

1. Les faces du cube d'arête 1 sont des carrés de côté 1, dont les diagonales ont pour longueur $\sqrt{2}$. En particulier $BD = DE = ED = \sqrt{2}$. Le triangle BDE est équilatéral.

2. a. I est le centre de gravité du triangle BDE ou l'isobarycentre des points B, D et E. Les coordonnées de I sont de la forme $\frac{1}{3}(a_B + a_D + a_E)$. Avec le repère choisi on a $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$ et $E(0; 0; 1)$.

$$\text{On obtient donc } I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

- b. On a dans le repère choisi $G(1; 1; 1)$, donc le vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et le vecteur \overrightarrow{AI} ont les mêmes coordonnées.

Autre démonstration : on sait que $\vec{IB} + \vec{ID} + \vec{IE} = \vec{0} \iff$
 $3\vec{IA} + \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{0} \iff 3\vec{IA} + \vec{AG} = \vec{0} \iff \vec{IA} = \frac{1}{3}\vec{AG}.$

La relation vectorielle $\vec{IA} = \frac{1}{3}\vec{AG}$ signifie que les points A, I et G sont alignés, et encore plus précisément que le point I appartient à la droite (AG), ce point ayant l'abscisse $\frac{1}{3}$ si le repère choisi sur cette droite est le repère (A, G).

3. On sait déjà que I centre de gravité du triangle BDE est dans le plan (BDE).

D'autre part $\vec{IA} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le produit scalaire $\vec{IA} \cdot \vec{BD} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$

0, donc les vecteurs sont orthogonaux.

De même $\vec{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le produit scalaire $\vec{IA} \cdot \vec{BE} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$, donc les vec-

teurs sont orthogonaux.

Conclusion le vecteur \vec{IA} orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) est normal à ce plan.

Conclusion : I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B

Quel que soit le réel k , M_k est le point de la droite (AG), d'abscisse k pour le repère (A, G).

La droite (AM_k) est donc orthogonale au plan (BDE), donc aussi au plan \mathcal{P}_k .

Conclusion : le point N_k est le projeté orthogonal de A sur le plan \mathcal{P}_k .

- D'après la partie A, on sait que si $k = \frac{1}{3}$, $M_{\frac{1}{3}} = I$, donc $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}} = (BDE)$ et $N_{\frac{1}{3}} = B$
- Les coordonnées du vecteur $\vec{AM_k}$ sont les coordonnées du point M_k , soit $(k ; k ; k)$.
 - On sait qu'une équation du plan \mathcal{P}_k est de la forme $kx + ky + kz + d = 0$; comme il contient M_k , on a $k^2 + k^2 + k^2 + d = 0 \iff d = -3k^2$. L'équation du plan \mathcal{P}_k est donc $kx + ky + kz - 3k^2 = 0$ soit pour $k \neq 0$ (cas particulier où M est en A) $x + y + z - 3k = 0$.
 - La droite (BC) est définie par les équations des deux plans $x = 1$ et $z = 0$, donc en remplaçant dans l'équation précédente $1 + y + 0 - 3k = 0 \iff y = 3k - 1$.
Donc $N_k(1 ; 3k - 1 ; 0)$.
- M_k et N_k appartiennent au plan \mathcal{P}_k qui est orthogonal aux vecteurs $\vec{AM_k}$ ou \vec{AG} . Donc pour tout k réel la droite $(M_k N_k)$ est orthogonale à la droite (AG); Les coordonnées de $\vec{M_k N_k}$ sont $(1 - k ; 2k - 1 ; -k)$, celles de \vec{BC} sont $(0 ; 1 ; 0)$.
 $\vec{M_k N_k} \cdot \vec{BC} = 2k - 1 = 0 \iff k = \frac{1}{2}$.
- On a $M_k N_k^2 = (1 - k)^2 + (2k - 1)^2 + (-k)^2 = 6k^2 - 6k + 2$. La distance est minimale si son carré l'est.
On a à trouver le minimum d'un trinôme :
 $6k^2 - 6k + 2 = 6 \left(k^2 - k + \frac{1}{3} \right) = 6 \left[\left(k - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right]$. Cette expression est minimale quand le carré est nul soit encore pour $k = \frac{1}{2}$.
Non demandé : cette distance est égale à $\sqrt{6 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.

Section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$

