Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2005

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** On a $u_0 = 1,\ u_1 = -\dfrac{1}{2},\ u_2 = -\dfrac{1}{4}$ et $u_3 = \dfrac{7}{8} \geqslant 0$.
La relation est vraie au rang 3.
Supposons que pour $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} + n - 1$. Or $n \geqslant 3 \iff n - 1 \geqslant 2$, donc $u_{n+1} \geqslant 2 > 0$. L'hérédité est démontrée.
On a donc démontré par récurrence que pour $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.

b. $n \geqslant 4 \iff n - 1 \geqslant 3$; d'après a, $u_{n-1} \geqslant 0 \iff \dfrac{1}{2}u_{n-1} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}u_{n-1} + n - 2 \geqslant n - 2 \iff \dfrac{1}{2}u_{n-1} + (n-1) - 1 \geqslant n - 2 \iff u_n \geqslant n - 2$.

c. Par comparaison, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. **a.** $v_n = 4u_n - 8n + 24 \Rightarrow v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4\left(\dfrac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8(n+1) - 1 = 2u_n + 4n - 4 - 8n - 8 + 24 = 2u_n - 4n + 12 = \dfrac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \dfrac{1}{2}v_n$.
On a donc démontré que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
La raison étant inférieure à 1, cette suite est décroissante. De plus $v_0 = 4u_0 + 24 = 28$.

b. On a immédiatement $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 28 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 4u_n - 8n + 24 \iff 4u_n = 28 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 8n - 24 \iff u_n = 7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 2n + 6$.

c. On a donc $u_n = \underbrace{7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}_{\text{suite géométrique}} + \underbrace{-2n + 6}_{\text{suite arithmétique}} = x_n + y_n$ où (x_n) est la suite (v_n) au facteur 4 près et la suite $\left(y_n\right)$ est définie par $y_n = -2n + 6$, suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 6.

d. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(x_k + y_k\right) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k$.
Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = \dfrac{7 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 14\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 14 - 7 \times \left(\dfrac{1}{2}^n\right)$.
D'autre part $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k = -6(n+1) + 2\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right) =$
$-6n - 6 + n(n+1) = -6n - 6 + n^2 + n = n^2 - 5n - 6$.
Finalement $\boxed{S_n = n^2 - 5n + 8 - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.}$

EXERCICE 2 **5 points**

1. On a d'une part
– On sait que $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$. Comme $1 < x$, on a $x < x^2 \Rightarrow x + x^2 < 2x^2 \iff \dfrac{1}{2x^2} < \dfrac{1}{x + x^2} \iff \dfrac{2\ln x}{2x^2} < \dfrac{2\ln x}{x + x^2} \iff \dfrac{\ln x}{x^2} < f(x)$.
– De même $1 < x \Rightarrow x < x^2 \Rightarrow 2x < x + x^2 \iff \dfrac{1}{x + x^2} < \dfrac{1}{2x} \Rightarrow \dfrac{2\ln x}{x + x^2} < \dfrac{2\ln x}{2x} \iff f(x) < \dfrac{\ln x}{x}$.
D'où l'encadrement demandé.

2. **a.** Comme $\dfrac{\ln x}{x} = \ln x \times \dfrac{1}{x}$, on reconnaît une forme uu' avec $u(x) = \ln x$, qui a pour primitive $\left[\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]$.

On a donc $\text{I} = \left[\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_2^4 = \dfrac{3(\ln 2)^2}{2}$.

Pour J, on intègre par parties en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x & \text{d}v(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ \text{d}u(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$\text{J} = \left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_2^4 + \displaystyle\int_2^4 \dfrac{1}{x^2}\,\text{d}x = \left[-\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}\right]_2^4 = \dfrac{1}{4}$.

b. De l'encadrement trouvé en 1, on en déduit, en intégrant entre 2 et 4 l'encadrement : $\text{J} < \text{K} < \text{I} \iff \dfrac{1}{4} < \text{K} < \dfrac{3(\ln 2)^2}{2}$.

3. L'unité d'aire vaut $1 \times 4 = 4$ cm^2. L'aire cherchée est donc le quadruple de l'intégrale K.

Donc $\boxed{1 < \mathcal{A} < 6(\ln 2)^2}$ soit approximativement $1 < \mathcal{A} < 2,883$. (cm^2)

EXERCICE 3 — **4 points**

1. **a.** On a $b' = \dfrac{1}{3+\text{i}\sqrt{3}} = \dfrac{3-\text{i}\sqrt{3}}{9+3} = \dfrac{1}{4} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Forme exponentielle : $\left|b'\right|^2 = \dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{144} = \dfrac{9+3}{144}$. Donc $\left|b'\right| = \dfrac{2\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Or $b' = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{6}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{4} - \dfrac{\text{i}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

b. Le symétrique d'un point M d'affixe z est le point d'affixe $-z$. Un point (d'affixe $z \neq 1$) a pour image son symétrique si et seulement si :

$\dfrac{1}{z-1} = -z \iff 1 = -z^2 + z \iff z^2 - z + 1 = 0 \iff \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = 0 \iff \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0 \iff \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \iff \left(z - \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

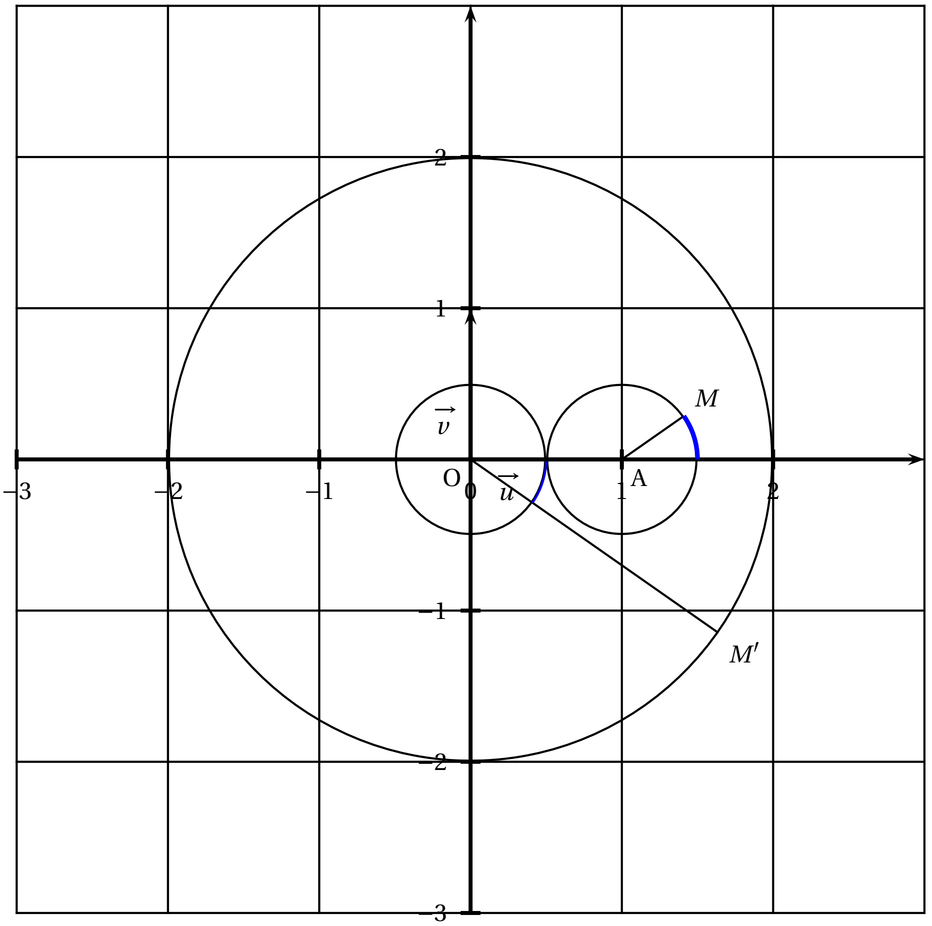
Cette équation a deux solutions : $z_1 = \dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou encore $\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. **a.** $z' = \dfrac{1}{z-1} \Rightarrow \left|z'\right| = \left|\dfrac{1}{z-1}\right| = \dfrac{1}{|z-1|}$. De même pour les arguments $z' = \dfrac{1}{z-1} \Rightarrow \arg\left(z'\right) = \arg\left(\dfrac{1}{z-1}\right) = \arg(1) - \arg(z-1) = 0 - \arg(z-1) = -\arg(z-1) \mod [2\pi]$.

b. M d'affixe z appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon r si et seulement si $|z-1] = r$. D'après la question précédente l'image M' de ce point a une affixe z' telle que $\left|z'\right| = \dfrac{1}{|z-1|} = \dfrac{1}{r} = \text{O}M'$.

Conclusion : l'image d'un point du cercle $\mathcal{C}$ appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon $\dfrac{1}{r}$.

c. Application si $r = \dfrac{1}{2}$: pour avoir un argument opposé on construit sur les deux cercles de rayons $\dfrac{1}{2}$ deux arcs de même longueur.



EXERCICE 4 **4 points**

1. **a.** On intègre par parties entre 0 et $t \geqslant 0$ en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \lambda x & \mathrm{d}v(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ \mathrm{d}u(x) = \lambda & v(x) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \end{cases}$$

u et v étant dérivables et u' et v' continues sur $[0\ ;\ t]$,
$\displaystyle\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)\right]_0^t = -t\mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$.

2. Si le temps moyen d'attente est égal à 5 minutes, alors $\dfrac{1}{\lambda} = 5 \iff \lambda = \dfrac{1}{5} = 0,2$.
La probabilté d'attendre plus de 10 minutes est : $1 - p(X \leqslant 10) = 1 - \displaystyle\int_0^{10} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{10} = \mathrm{e}^{-1}$. (soit $\approx 0,135$ au millième près)
De même la probabilté d'attendre plus de 5 minutes est : $1 - p(X \leqslant 10) = 1 - \displaystyle\int_0^5 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^5 = \mathrm{e}^{-2}$. (soit $\approx 0,368$ au millième près)

3. Il faut calculer $p(X \geqslant 15)$ sachant que $X \geqslant 10$. Or
$p_{X \geqslant 10}(X \geqslant 15) = \dfrac{p(X \geqslant 15 \text{ et } X \geqslant 10)}{p(X \geqslant 10)} = \dfrac{p(X \geqslant 15)}{p(X \geqslant 10)} = \dfrac{1 - p(X \leqslant 15)}{p(X \geqslant 10)} = \dfrac{1 - \int_0^{15} 0,2\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x}{p(X \geqslant 10)} =$

$\dfrac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-1} \approx 0,368$.
On a $p_{X \geqslant 10}(X \geqslant 15) = p(X \geqslant 5)$. Donc la probabilité est celle du temps supplémentaire d'attente. La loi exponentielle est une loi sans viellissement.

EXERCICE 5 **4 points**

1. Pour respectivement $t = -3$ et $t = -2$, on trouve que A et B sont deux points distincts de la droite dont on a une équation paramétrique. Elle est donc confondue avec la droite (AB).
2. Un point commun à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ a ses coordonnées qui vérifient $2t+3t-(8+t)+4 = 0 \iff 4t-4=0 \iff t=1$. Il existe donc un point commun de coordonnées $(1\,;1\,;9)$. Donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont sécantes.
3. On calcule $d(\text{A}\,;\mathscr{P}) = \dfrac{|1\times 2+3\times 2-(-4)+4|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}} = \dfrac{16}{\sqrt{14}} = \dfrac{16\sqrt{14}}{14} = \dfrac{8}{7}\sqrt{14}$.
4. $\mathscr{S}$ est la sphère de centre O et de rayon 4.
Or $\text{OB}^2 = 9+16+1 = 26 \Rightarrow \text{OB} = \sqrt{26} > \sqrt{25} \geqslant 5 > 4$.
Conclusion : B est à l'extérieur de $\mathscr{S}$.