Correction

$\mathbb{E}$xercice 1 :

Commun à tous les candidats **5 points**

Partie A

1. $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x^2+3}\right)$ est égale à :	☐ $+\infty$ ■ 0 ☐ e^3
2. $e^{ln(2)}+e-4$ est égale à :	■ $e-2$ ☐ $ln(2)+e-4$ ☐ -2
3. $ln(1-x)\geq 1$ est équivalente à :	■ $x\leq 1-e$ ☐ $x<0$ ☐ $x>-e$
4. La fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=ln(x)+2$ a pour primitive la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par :	☐ $F(x)=x.ln(x)$ ☐ $F(x)=x.ln(x)-x$ ■ $F(x)=x.ln(x)+x$

Partie B

5. $P(\overline{A})$ est égale à :	■ $(1-a)(1+a)$ ☐ a^2-1 ☐ b^2-a^2
6. $P(A\cup B)$ est égale à :	☐ $(a+b)^2$ ■ $(a-b)^2$ ☐ a^2+b^2
7. $P_B(A)$ est égale à :	☐ $a/2b$ ☐ $2b/a$ ■ $2a/b$

Partie C

8. U_{n+1} est égale à :	☐ $U_n+\frac{1}{2}$ ■ $\frac{1}{2}\,U_n$ ☐ $(U_n)^{\frac{1}{2}}$
9. U_n est égale à :	☐ $2+\frac{1}{2}n$ ■ $2^{(1-n)}$ ☐ $2^{(n+1)}$
10. $U_0+U_1+U_2+U_3+U_4$ est égale à :	■ $31/8$ ☐ 15 ☐ $15/8$

$\mathbb{E}$xercice 2 :

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

1. a) $f(0) = 2$; $f'(0) = 9$. b) $f(1) = 6$; $f'(1) = 0$. c) $f(2) = 4$; $f'(2) = -3$.

   d) $f(x) \leq x + 2$ si et seulement si les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ sont situé au-dessus des points de la droite $\mathcal{D}$ ou à l'intersection. Ainsi, $f(x) \leq x + 2$ si et seulement si $x \in [2; 4] \cup \{0\}$.

2. a)

x	0		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

   b) La fonction f étant strictement positive sur $[0; 4]$, la fonction $g = ln(f)$ est définie sur cet intervalle. De plus, d'après le cours, f et $ln(f)$ ont alors les mêmes variations, d'où le tableau :

x	0		1		3		4
$g(x)$	$ln2$	$\nearrow$	$ln6$	$\searrow$	$ln2$	$\nearrow$	$ln6$

3. La réponse b) est juste.
On considère les points

$$A'(2; 4), B(3; 3), C(3; 5), D(2; 2), E(4; 2), F(4; 6)$$

. On a les inégalités suivantes :

$$\mathcal{A}(A'BC) \leq A \leq \mathcal{A}(A'DEF), \quad \text{c'est à dire} \quad 1 \leq A \leq 6.$$

4. a) Puisque $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, $f(0) = 2 \iff q = 2$.
   Et puisque $f'(x) = 3mx^2 + 2nx + p$, $f'(0) = 9 \iff p = 9$.

   b) $f(1) = 6 \iff m + n + 9 + 2 = 6$ et $f'(1) = 0 \iff 3m + 2n + 9 = 0$.
   La résolution de ce système d'équations donne

$$m = 1, n = -6, p = 9, q = 2.$$

5. a) Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'abscisses 0 et 4 sont respectivement $f'(0)$ et $f'(4)$. Or, $f'(0) = 9$ et $f'(4) = 9$. Les coefficients directeurs étant égaux, ces deux droites sont parallèles.

   b) $A = \int_2^4 (x + 2 - f(x)).dx = \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x).dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4 = 4 \;\; u.a.$

$\mathbb{E}$xercice 2 :

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Partie A

1. Ce graphe est connexe, mais il admet plus de deux sommets de degré impair, donc il n'admet pas de chaîne eulérienne.

2. On note γ, le nombre chromatique de ce graphe, D le degré maximal des points du graphe et r l'ordre maximal d'un sous-graphe complet extrait du graphe.
On sait d'après le cours que :

$$r \leq \gamma \leq 1 + D$$

Or, $D = D_D = 5$ et $r = r(sous - graphe(ABCD)) = 4$, ainsi : $4 \leq \gamma \leq 6$.

Partie B

1. On utilise par exemple l'algorithme de Dijkstra, qui donne le tableau suivant :

E	A	B	C	D	G	S	$Parcours$
0	$E-4$	$E-7$	∞	∞	∞	∞	E
0	$E-4$	$A-6$	$A-12$	$A-13$	∞	∞	$E-A$
0	$E-4$	$A-6$	$B-11$	$B-12$	∞	∞	$E-A-B$
0	$E-4$	$A-6$	$B-11$	$B-12$	$C-15$	$C-19$	$E-A-B-C$
0	$E-4$	$A-6$	$B-11$	$B-12$	$C-15$	$C-19$	$E-A-B-C-D$
0	$E-4$	$A-6$	$B-11$	$B-12$	$C-15$	$C-19$	$E-A-B-C-D-G$
0	$E-4$	$A-6$	$B-11$	$B-12$	$C-15$	$C-19$	$E-A-B-C-D-G-S$

La trajet le plus rapide est donc $E-A-B-C-S$, il durera 19 minutes.

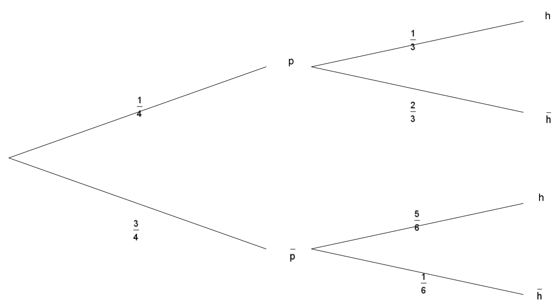
2. a) Lorsque l'ouvrier est en C, il lui reste à faire le trajet $C-D-S$, ce qui lui prendra 11 minutes suppémentaires. Ainsi, dans ce cas, le trajet sera : $E-A-B-C-D-S$, ce qui lui prendra 22 minutes.

b) L'ouvrier doit passer par, D. Dans ce cas, le trajet sera $E-A-B-D-S$ et il durera 20 minutes.

Exercice 3 :

Commun à tous les candidats **3 points**

1. Arbre de probabilité :



2. $P(P \cap H) = P_P(H) \times P(P) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
Ainsi, la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est de $\dfrac{1}{12}$.

3. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(H) = P(P \cap H) + P(\overline{P} \cap H) = \frac{1}{12} + P_{\overline{P}}(H) \times P(\overline{P}) = \frac{1}{12} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{17}{24}$$

Ainsi, la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\dfrac{17}{24}$.

4. $P_H(P) = \dfrac{P(P \cap H)}{P(H)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{17}{24}} = \dfrac{2}{17}$.
Ainsi, sachant que Monsieur X est arrivé à l'heure à son travail, la probabilité qu'il ait plu ce jour là est de $\frac{2}{17}$.

5. $p = 1 - P(\overline{H}\,\overline{H}\,\overline{H}\,\overline{H})$. Or il s'agit d'épreuves aléatoires indépendantes, donc :

$$p = 1 - P(\overline{H})^4 = 1 - \left(\frac{7}{24}\right)^4 \approx 0,993$$

Ainsi, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois au cours de ces 4 jours est d'environ $0,993$.

Exercice 4 :

Commun à tous les candidats **7 points**

1. On vérifie, d'une part que

$$C_T(0) = 0$$

et d'autre part que

$$C_T'(x) = \left(2x^2 + xe^{-2x+3}\right)' = 4x + e^{-2x+3} - 2xe^{-2x+3} = 4x + (1-2x)e^{-2x+3} = C(x)$$

ce qui prouve que C_T est la primitive sur $[0;5]$ de C, qui s'annule en 0.

2.

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{2x^2 + xe^{-2x+3}}{x} = 2x + e^{-2x+3}$$

3. a)

$$C_M'(x) = 2 - 2e^{-2x+3} = 2(1 - e^{-2x+3}).$$

b) $1 - e^{-2x+3} = 0$ est équivalent successivement à,
$1 = e^{-2x+3}$, $e^0 = e^{-2x+3}$, $-2x+3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$.

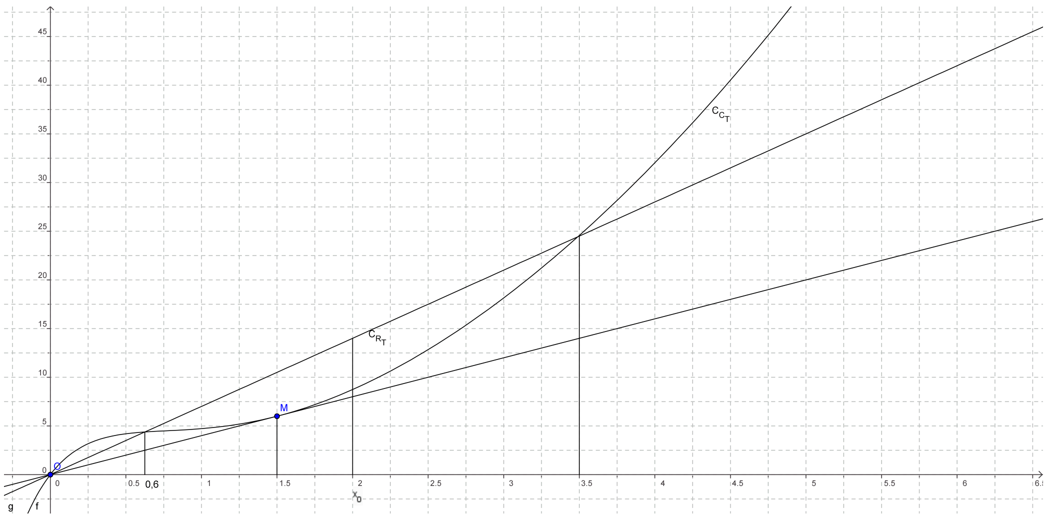
c) $1 - e^{-2x+3} > 0$. est équivalent successivement à,
$1 > e^{-2x+3}$, $e^0 > e^{-2x+3}$, $-2x+3 < 0$, $x > \frac{3}{2}$.

d) D'après le c), pour tout x de $[\frac{3}{2};5]$, $C_M'(x) \geq 0$, donc la fonction C_M est croissante sur $[\frac{3}{2};5]$;

et pour tout x de $]0; \frac{3}{2}]$, $C'_M(x) \leq 0$, donc la fonction C_M est décroissante sur $]0; \frac{3}{2}]$.

4. Grâce au 1.d), on en déduit que le minimum de la fonction est atteint en $x = \frac{3}{2}$, et dans ce cas, $C_M(\frac{3}{2}) = 4$.
Autrement dit, l'entreprise aura un coût moyen minimal de 4000 euros pour la fabrication de 150 objets.

5. a) Lecture graphique.



- Puisque $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x} = \dfrac{C_T(x) - 0}{x - 0}$, le coût moyen est représenté par le coefficient directeur de la droite (OM) où M est un point de $\mathcal{C}_{C_T}$. Graphiquement, ce coefficient directeur est minimal lorsque $x + \frac{3}{2}$.

- Le bénéfice sera positif lorsque la courbe $\mathcal{C}_{R_T}$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_{C_T}$. Ce qui, graphiquement, est approximativement le cas dans l'intervalle $[0, 6; 3, 5]$.

- Le bénéfice sera maximal lorsqu'il est positif et que l'écart entre les courbes $\mathcal{C}_{R_T}$ et $\mathcal{C}_{C_T}$ est le plus grand. Ce qui, graphiquement, correspond à $x_0 \approx 2$. Le bénéfice sera donc maximal pour la production d'environ 200 objets.

b) À l'aide de la calculatrice, on obtient

$$B(0, 62) < 0; B(0, 63) > 0; B(3, 490) > 0; B(3, 491) < 0$$

Ainsi, pour qu'il y ait un bénéfice positif l'entreprise doit produire entre 63 et 349 objets.