

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S La Réunion 15 juin 2006 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1.
 - a. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
 - b. Étudier les variations de la fonction f .
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .
 - a. On a tracé la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe \mathcal{C} d'abscisses respectives u_1 et u_2 . Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) .
 - b. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq e$ (on pourra utiliser la question 1. b.).
 - c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e; +\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $(f(u_n))$, démontrer que $f(\ell) = \ell$.
2. En déduire la valeur de ℓ .

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

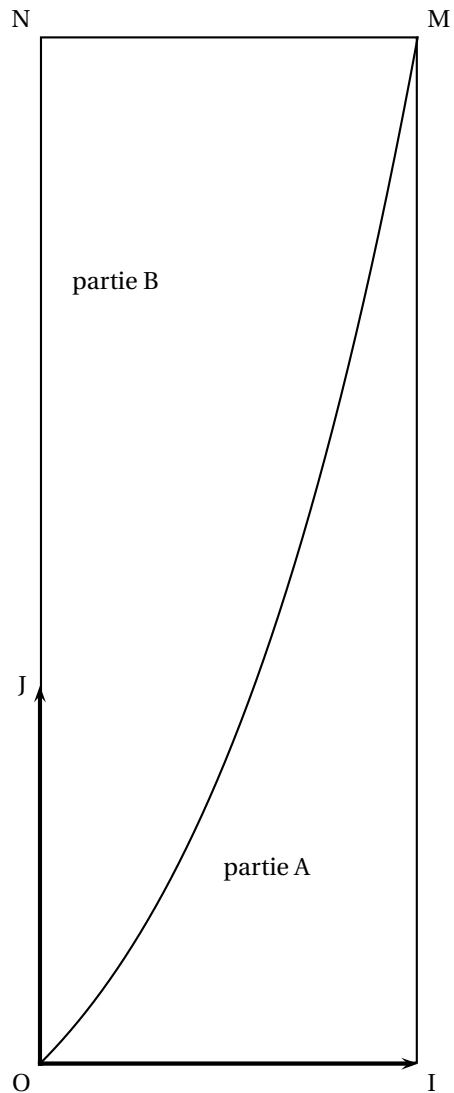
Première partie

Calculer l'intégrale $\int_0^1 xe^x dx$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire OIMN telle que, dans le repère orthonormal $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$, la ligne courbe \mathcal{C} reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$. Cette courbe partage la cible OIMN en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.

Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe \mathcal{C} .



Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2e}$.
Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?
2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.
 - a. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X . En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.
 - b. Soit E l'évènement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E .
 - c. Soit F l'évènement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).
Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?
3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.
 - a. Déterminer en fonction de n la probabilité pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.
 - b. Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geq 0,99$.

EXERCICE 3**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

- Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z} = i$. Écrire la solution sous forme algébrique.
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
- Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2, \quad b = 4, \quad a' = 2i \quad \text{et} \quad d = 2 + 2i.$$

Quelle est la nature du triangle ODB ?

- Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - i\sqrt{3}$ et $f = 1 + i\sqrt{3}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $OEAF$?
- Soit \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 2. Soit \mathcal{C}' le cercle de centre A' et de rayon 2.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$
 - On désigne par E' l'image par la rotation r du point E . Calculer l'affixe e' du point E' .
 - Démontrer que le point E' est un point du cercle \mathcal{C}' .
 - Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.
- Soit D' l'image du point D par la rotation r . Démontrer que le triangle $EE'D'$ est rectangle.

EXERCICE 3**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

$ABCD$ est un carré tel que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = +\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré $ABCD$. Soit J le milieu du segment $[CD]$.

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J .

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s . Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s .
- On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre $[AI]$, Γ_2 est le cercle de diamètre $[BJ]$. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 . Placer Ω sur la figure.
- Donner l'image par s de la droite (BC) . En déduire le point image par s du point C , puis le point K image par s du point I .
- On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle-même).

- a. Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
- b. Trouver l'image du point A par h . En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2, $2 + 2i$ et $2i$.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude est $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.
2. Calculer l'affixe du point Ω .
3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$. Placer le point E sur la figure.

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, **parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses**. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur 1 point. Toute réponse juste rapporte 0,5 point. Donner plus de 2 réponses à une question entraîne la nullité de la question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

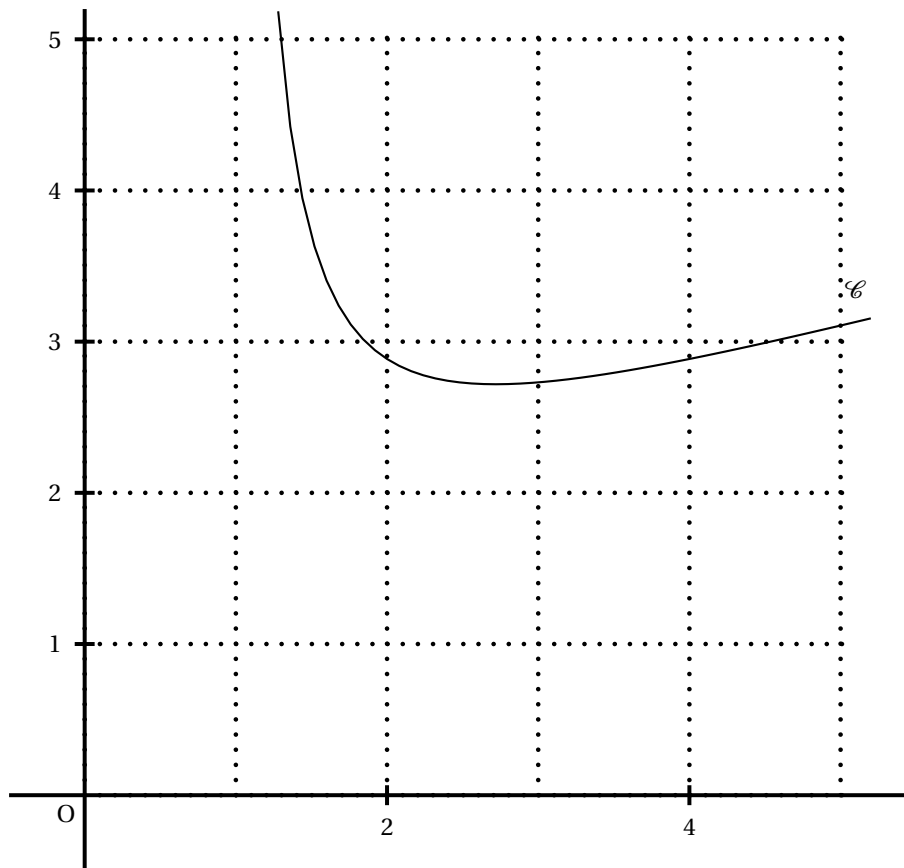
1. Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.
 - a. La distance du point O au plan P est égale à 1.
 - b. La distance du point O au plan P est égale à $\frac{1}{\sqrt{29}}$.
 - c. Le vecteur $\vec{n} \left(1 ; \frac{3}{2} ; 2 \right)$ est un vecteur normal au plan P .
 - d. Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P .
2. On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point $A(1 ; 1 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} (1 ; -4 ; -2)$.
 - a. La droite D est parallèle au plan P .
 - b. La droite D est orthogonale au plan P .
 - c. La droite D est sécante avec le plan P .
 - d. Un système d'équations paramétriques de D est
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$
3. On désigne par E l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$. Soit le point $A(1 ; 1 ; 1)$.
 - a. L'ensemble E contient un seul point, le point A.
 - b. L'ensemble E est une droite passant par A.
 - c. L'ensemble E est un plan passant par A.
 - d. L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u} (1 ; -3 ; 2)$.
4. ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).
 - a. Le plan P contient toujours le point D.
 - b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.
 - c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}.$$
 - d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

ANNEXE 1

À compléter et à rendre avec la copie

Figure de l'exercice 1



ANNEXE 2

À compléter et à rendre avec la copie

Figure de l'exercice 3

