

Durée : 4 heures

## Baccalauréat S Centres étrangers juin 2006

### EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

#### Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

i. Si  $z$  est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

ii. Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes non nuls.

Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

#### Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si  $z$  est un nombre complexe,  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$  et  $|z|$  désigne le module de  $z$ .

1. Si  $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ , alors  $z^4$  est un nombre réel.
2. Si  $z + \bar{z} = 0$ , alors  $z = 0$ .
3. Si  $z + \frac{1}{z} = 0$ , alors  $z = i$  ou  $z = -i$ .
4. Si  $|z| = 1$  et si  $|z + z'| = 1$ , alors  $z' = 0$ .

### EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.

On lit le nombre sur la face cachée.

Pour  $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ , on note  $p_k$  la probabilité d'obtenir le nombre  $k$  sur la face cachée.

Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  et  $p_4$  dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que  $p_4 = 0,4$  démontrer que  $p_1 = 0,1$ ,  $p_2 = 0,2$  et  $p_3 = 0,3$ .
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
  - a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
  - b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note  $X$  la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
- Pour  $1 \leq i \leq 10$ , exprimer en fonction de  $i$  la probabilité de l'évènement  $(X = i)$ .
  - Calculer l'espérance mathématique de  $X$ . Interpréter le résultat obtenu.
  - Calculer la probabilité de l'évènement  $(X \geq 1)$ . On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On lance  $n$  fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux. On note  $U_n$  la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au  $n$ -ième lancer.
- Montrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
  - Calculer  $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$  puis étudier la convergence de la suite  $(S_n)$ .
  - Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $S_n > 0,999$ .

**EXERCICE 2****5 points****Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier  $4^n - 1$ , lorsque  $n$  est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si  $p$  est un nombre entier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$ , alors  $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ».

**Partie A.** Quelques exemples.

- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n$  est congru à 1 modulo 3.
- Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que  $4^{28} - 1$  est divisible par 29.
- Pour  $1 \leq n \leq 4$ , déterminer le reste de la division de  $4^n$  par 17. En déduire que, pour tout entier  $k$ , le nombre  $4^{4k} - 1$  est divisible par 17.
- Pour quels entiers naturels  $n$  le nombre  $4^n - 1$  est-il divisible par 5 ?
- À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de  $4^{28} - 1$ .

**Partie B.** Divisibilité par un nombre premier

Soit  $p$  un nombre premier différent de 2.

- Démontrer qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ .
- Soit  $n \geq 1$  un entier naturel tel que  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ . On note  $b$  le plus petit entier strictement positif tel que  $4^b \equiv 1 \pmod{p}$  et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $b$ .
  - Démontrer que  $4^r \equiv 1 \pmod{p}$ . En déduire que  $r = 0$ .
  - Prouver l'équivalence :  $4^n - 1$  est divisible par  $p$  si et seulement si  $n$  est multiple de  $b$ .
  - En déduire que  $b$  divise  $p - 1$ .

**EXERCICE 3****6 points****Commun à tous les candidats**

On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , (unité graphique : 5 cm).

**Partie A.** Étude de la fonction  $f$

1. Vérifier que pour tout nombre réel  $x$  :  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x$ . En déduire les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Dresser le tableau des variations de  $f$ .

Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  et ses asymptotes éventuelles dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie B.** Quelques propriétés graphiques.

1. On considère les points  $M$  et  $M'$  de la courbe  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives  $x$  et  $-x$ . Déterminer les coordonnées du milieu  $A$  du segment  $[MM']$ . Que représente le point  $A$  pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?
2. Soit  $n$  un entier naturel. On désigne par  $D_n$  le domaine du plan limité par la droite d'équation  $y = 1$ , la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = n$ ,  $\mathcal{A}_n$  désigne l'aire du domaine  $D_n$  exprimée en unité d'aire.
  - a. Calculer  $\mathcal{A}_n$ .
  - b. Étudier la limite éventuelle de  $\mathcal{A}_n$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Partie C.** Calcul d'un volume.

Soit  $\lambda$  un réel positif, On note  $\mathcal{V}(\lambda)$  l'intégrale  $\int_{-\lambda}^0 \pi [f(x)]^2 dx$ .

On admet que  $\mathcal{V}(\lambda)$  est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe  $\mathcal{C}$  obtenue pour  $-\lambda \leq x \leq 0$ .

1. Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\text{pour tout nombre réel } x : \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2}$$

2. Exprimer  $\mathcal{V}(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ .
3. Déterminer la limite de  $\mathcal{V}(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

#### EXERCICE 4

5 points

**Commun à tous les candidats**

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \vec{AB}; \vec{AD}, \vec{AE})$

**Partie A.** Un triangle et son centre de gravité.

1. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
  - a. Calculer les coordonnées de I.
  - b. Démontrer que  $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AG}$ . Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?
3. Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

**Partie B.** Une droite particulière

Pour tout nombre réel  $k$ , on définit deux points  $M_k$  et  $N_k$ , ainsi qu'un plan  $\mathcal{P}_k$  de la façon suivante :

- $M_k$  est le point de la droite (AG) tel que  $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$  ;
- $\mathcal{P}_k$  est le plan passant par  $M_k$  et parallèle au plan (BDE) ;
- $N_k$  est le point d'intersection du plan  $\mathcal{P}_k$  et de la droite (BC).

1. Identifier  $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$ ,  $M_{\frac{1}{3}}$  et  $N_{\frac{1}{3}}$  en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance  $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$ .
2. Calcul des coordonnées de  $N_k$ .
  - a. Calculer les coordonnées de  $M_k$  dans le repère  $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .
  - b. Déterminer une équation du plan  $\mathcal{P}_k$  dans ce repère.
  - c. En déduire que le point  $N_k$  a pour coordonnées  $(1 ; 3k - 1 ; 0)$ .
3. Pour quelles valeurs de  $k$  la droite  $(M_kN_k)$  est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?
4. Pour quelles valeurs de  $k$  la distance  $M_kN_k$  est-elle minimale ?
5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan  $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$ .  
Tracer la droite  $(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}})$  sur la même figure.

ANNEXE

Exercice 4 (commun à tous les candidats)

Feuille à compléter et à rendre avec la copie

