

∞ Baccalauréat S Pondichéry 31 mars 2005 ∞

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $[1 ; +\infty[$  par

$$f(t) = \frac{e^t}{t}.$$

1. **a.** Justifier la continuité de  $f$  sur  $[1 ; +\infty[$ .
- b.** Montrer que  $f$  est croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

**2. Restitution organisée de connaissances**

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

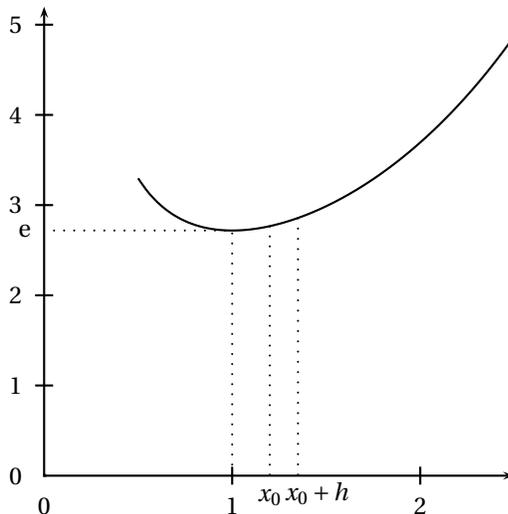
Pour tout réel  $x_0$  de  $[1 ; +\infty[$ , on note  $\mathcal{A}(x_0)$  l'aire du domaine délimité par la courbe représentant  $f$  dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = x_0$ .

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur  $[1 ; +\infty[$  est une primitive de  $f$ .

- a.** Que vaut  $\mathcal{A}(1)$  ?
- b.** Soit  $x_0$  un réel quelconque de  $[1 ; +\infty[$  et  $h$  un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

- c.** Lorsque  $x_0 > 1$ , quel encadrement peut-on obtenir pour  $h < 0$  et tel que  $x_0 + h \geq 1$  ?
- d.** En déduire la dérivabilité en  $x_0$  de la fonction  $\mathcal{A}$  ainsi que le nombre dérivé en  $x_0$  de la fonction  $\mathcal{A}$ .
- e.** Conclure.



**EXERCICE 2**

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe  $P$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $I$  le point d'affixe  $z_I = 1$ , par  $A$  le point d'affixe  $z_A = 1 - 2i$ , par  $B$  le point d'affixe  $-2 + 2i$  et par  $(\mathcal{C})$  le cercle de diamètre  $[AB]$ .

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

- Déterminer le centre  $\Omega$  du cercle  $(\mathcal{C})$  et calculer son rayon.
- Soit D le point d'affixe  $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ .  
Écrire  $z_D$  sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle  $(\mathcal{C})$ .
- Sur le cercle  $(\mathcal{C})$ , on considère le point E, d'affixe  $z_E$ , tel qu'une mesure en radians de  $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$  est  $\frac{\pi}{4}$ .
  - Préciser le module et un argument de  $z_E + \frac{1}{2}$ .
  - En déduire que  $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$ .
- Soit  $r$  l'application du plan P dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left( z + \frac{1}{2} \right).$$

- Déterminer la nature de  $r$  et ses éléments caractéristiques.
- Soit K le point d'affixe  $z_K = 2$ .  
Déterminer par le calcul l'image de K par  $r$ . Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère l'application  $f$  qui au point  $M$  d'affixe  $z$  fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5}.$$

- On note  $x$  et  $x'$ ,  $y$  et  $y'$  les parties réelles et les parties imaginaires de  $z$  et  $z'$ .  
Démontrer que : 
$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$
- Déterminer l'ensemble des points invariants par  $f$ .
  - Quelle est la nature de l'application  $f$  ?
- Déterminer l'ensemble D des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  soit réel.
- On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
  - Donner une solution particulière  $(x_0, y_0)$  appartenant à  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $4x - 3y = 2$ .
  - Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $4x - 3y = 2$ .
- On considère les points  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  tels que  $x = 1$  et  $y \in \mathbb{Z}$ . Le point  $M' = f(M)$  a pour affixe  $z'$ .  
Déterminer les entiers  $y$  tels que  $\operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z')$  soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points A, B et C de coordonnées respectives  $(1; 0; 2)$ ,  $(1; 1; 4)$  et  $(-1; 1; 1)$ .

1.
  - a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
  - b. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées (3 ; 4 ; -2).  
Vérifier que le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal aux vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .  
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient  $P_1$  et  $P_2$  les plans d'équations respectives  $2x + y + 2z + 1 = 0$  et  $x - 2y + 6z = 0$ .
  - a. Montrer que les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
  - b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?
3. Soit  $t$  un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et  $t$ .
  - a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif  $t$ .  
Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.  
Exprimer le vecteur  $\vec{IG}$  en fonction du vecteur  $\vec{IC}$ .
  - b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque  $t$  décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.  
Pour quelle valeur de  $t$ , le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$ . On définit ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Prouver, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}.$$

- a. Étudier le sens de variation et la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$ .
- b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle  $]1 ; +\infty[$  un unique nombre réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 1,9$ .
- c. Déterminer l'entier naturel  $n_0$  tel que  $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$ .
- d. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

3.
  - a. Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$  à partir du rang 16.
  - b. Que peut-on en déduire pour la suite ?
4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .