Baccalauréat S Centres étrangers juin 2005

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.

On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

On pourra construire un arbre pondéré.

1. On note :

   • D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;

   • R_1 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

   Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

   On note :

   - D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel ».
   - R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».
   - R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

   Montrer que la probabilité de l'évènement R est 0,236.

3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (on donnera la réponse arrondie au millième)

4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire ? (on donnera la réponse arrondie au millième)

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ unité graphique 8 cm.

On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.

À tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.

2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M appartenant à $\mathcal{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

   a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si $|z+1|^2+|z|^2=1$.

   b. Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ équivaut à $\left(z+\dfrac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\dfrac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{4}$.

   c. En déduire l'ensemble $\mathcal{C}$ cherché.

3. Soit M un point de $\mathscr{E}$ et z son affixe, On désigne par r le module de z et α l'argument de z, $\alpha \in]-\pi\,;\,\pi]$.

   a. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de $\mathscr{E}$ tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).

   b. Représenter les ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   c. Déterminer les affixes des points M de $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif.

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A
Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B
On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ vérifiant la relation

$$\text{(E)}\ :\quad a^2 - 250\,507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.

   a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

   b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.

   c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\,;\,b)$.
3. On suppose que le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E).

   a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\,;\,b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats
Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec AB = AC = AD = a. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD).
$\left(\text{On pourra par exemple calculer } \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}.\right)$
2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.
3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].
   a. Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.
   b. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que
$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$
4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.
   a. Démontrer que $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$.
   b. Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA}$.
   c. En déduire que HC = HD.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est
$$V = \frac{1}{3}bh.$$

EXERCICE 4 **7 points**
Commun à tous les candidats
I. Première partie
On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par
$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0~;~+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

II. Deuxième partie
On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :
$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$
3. On pose $S_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^3}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}$.
À l'aide de la première partie, montrer que :
$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$
4. Caiculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$.
5. Étude de la convergence de la suite (u_n).
   a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

c. On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Montrer alors que $\dfrac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.