

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2004

**EXERCICE 1**

**4 points**

Dans le plan complexe  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le quadrilatère ABCD tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \alpha \quad [2\pi], \quad (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = \beta \quad [2\pi], \quad 0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi.$$

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que :

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DQ}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Soit  $a, b, c$  et  $d$  les affixes respectives des points A, B, C et D,  $m, n, p$  et  $q$  les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b) + b, \quad n = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b) + b,$$

$$p = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - d) + d, \quad q = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - d) + d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :

a. Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

b. Démontrer que l'on a :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{QP}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad AC = QP$$

$$(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{et} \quad NP = BD.$$

3. Démontrer que MNPQ est un carré si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD vérifient :

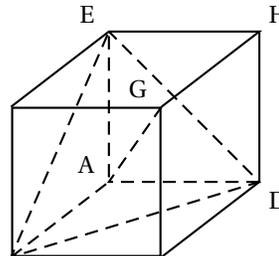
$$AC = BD \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

où  $k$  est un entier relatif.

**EXERCICE 2**

**5 points**

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.  
 $O_1$  et  $O_2$  sont les centres des carrés ABCD et EFGH, et I est le centre de gravité du triangle EBD.  
 Soit  $m$  un nombre réel et  $G_m$  le barycentre du système de points pondérés :



$$\{(E; 1), (B; 1 - m), (G; 2m), (D; 1 - m)\}$$

**Partie A**

1. Justifier l'existence du point  $G_m$ .
2. Préciser la position du point  $G_1$ .
3. Vérifier que  $G_0 = A$ . En déduire que les points A, I et G sont alignés.
4. Démontrer que  $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$ . En déduire l'ensemble des points  $G_m$  lorsque  $m$  parcourt l'ensemble des nombres réels.
5.
  - a. Vérifier que les points A,  $G_m$ , E et  $O_1$ , sont coplanaires.
  - b. Déterminer la valeur de  $m$  pour laquelle  $G_m$  se trouve sur la droite (EI).

### Partie B

Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan ABD.
2. Déterminer les coordonnées du point  $G_m$ .
3. Pour quelles valeurs de  $m$ , la distance de  $G_m$  au plan (EBD) est-elle égale à  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  ?

### EXERCICE 3

11 points

#### Partie A Étude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$$

et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées).

1.
  - a. Soit le polynôme  $P$  défini sur  $\mathbb{R}$  par  $P(X) = 1 + X - 2X^2$ . Étudier le signe de  $P(X)$ .
  - b. En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - c. Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?
2. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Qu'en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?
3. Vérifier que  $f(x) = e^{-2x}(e^{2x} + e^x - 2)$ , puis déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
4.
  - a. Soit  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ , calculer  $f'(x)$ .
  - b. Montrer que  $f'(x)$  a le même signe que  $(4 - e^x)$ , puis étudier le signe de  $f'(x)$ .
  - c. Dresser le tableau de variations de  $f$ . On montrera que le maximum est un nombre rationnel.
5.
  - a. Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 1$  n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.
  - b. Étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .
6. Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point A.
7. Tracer les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{T}$ , puis la courbe  $\mathcal{C}$ .

#### Partie B Étude d'une suite

1. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}$  l'axe des ordonnées et la droite  $\mathcal{D}$ .

2. On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$u_n = \int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} [f(x) - 1] dx.$$

- a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est à termes positifs.
  - b. Donner une interprétation géométrique de  $(u_n)$ .
3. a. En utilisant le sens de variation de  $f$ , montrer que, pour tout  $n \geq 2$  :  
si  $x \in [(n-1) + \ln 2 ; n + \ln 2]$  alors

$$f(n + \ln 2) - 1 \leq f(x) - 1 \leq f[(n-1) + \ln 2] - 1.$$

b. En déduire que, pour tout  $n$ ,  $n \geq 2$ , on a :

$$f(n + \ln 2) - 1 \leq u_n \leq f[(n-1) + \ln 2] - 1.$$

- c. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang 2.
  - d. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
4. Soit la suite  $(S_n)$  définie pour  $n > 0$ , par

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

- a. Écrire  $S_n$  à l'aide d'une intégrale.
- b. Interpréter géométriquement  $S_n$ .
- c. Calculer  $S_n$  et déterminer la limite de la suite  $(S_n)$ .