

Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$$

Soit D une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n .

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 .
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Exprimez u_n en fonction de n .
3. Comparez a_n et b_n . Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) . Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_n B_n]$ ont tous le même milieu I .
6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

EXERCICE 2

7 points

Commun à tous les candidats

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit $a \in [0; +\infty[$.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a .
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.

5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculez $J(a)$.

6. **a.** Démontrez que pour tout $t \in [0; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

b. Démontrez que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fautive. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

A : $2\sqrt{2}$ B : $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ C : $2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})$ D : $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

A : $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ B : $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ C : $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ D : $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

A : $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ B : $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ C : $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$ D : $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$

4. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

A : $\frac{7\pi}{8}$ B : $\frac{5\pi}{8}$ C : $\frac{3\pi}{8}$ D : $\frac{\pi}{8}$

EXERCICE 4**5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1.
 - a. Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1); (B, 1); (C, -1); (D, 1)\}$.
Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de \overrightarrow{CD} . Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).
 - b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1); (B, 1); (D, 2)\}$.
Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2 .
 - c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.
2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1); (B, 1); (C, m-2); (D, m)\}$.
 - a. Précisez l'ensemble \mathcal{E} des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble \mathcal{E} .
 - b. Démontrez que G_m , appartient au plan (ICD).
 - c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{G_m}$ est constant.
 - d. En déduire l'ensemble \mathcal{F} des points G_m lorsque m décrit l'ensemble \mathcal{E} .

EXERCICE 4**5 points****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r .
 - b. Déterminez les images de R et de P par r .
 - c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS .
3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
 - a. Déterminez les images respectives de R et de P par s .
 - b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment $[BC]$ privé de B ?
 - c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

Annexe : exercice 4

