Baccalauréat S France 15 juin 2007 (correction)

Exercice 1 **3 points**

1. (P) a pour équation cartésienne : $x+2y-z+1=0$. Un vecteur normal à (P) est : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

   (P') a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$. Un vecteur normal à (P) est : $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   Alors : $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}=(1\times(-1))+(2\times 1)+(-1\times 1)=-1+2-1=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux. Les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.
2. Les deux plans étant perpendiculaires, ils se coupent selon une droite (d). Les coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$ des points de (d) vérifient les deux équations des plans et sont solutions du système formé par ces deux équations
   $\left\{\begin{array}{lcl}x+2y-z+1&=&0\\-x+y+z&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}x+2y=z-1&=&0\\-x+y&=&-z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}-x+y&=&-z\\3y&=&-1\end{array}\right.$
   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}x&=&-\dfrac{1}{3}+t\\y&=&-\dfrac{1}{3}\\z&=&t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$ qui est la représentation paramétrique de (d) donnée dans le texte.
3. Pour un plan d'équation (P) cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et un point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\ y_\mathrm{A}\,;\ z_\mathrm{A})$, la distance entre A et (P) est : d(A ; (P))= $\dfrac{|ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
   On en déduit : d(A ; (P))= $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ et d(A ; (P'))= $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
   Notons H et H' les projetés orthogonaux de A sur (P) et sur (P'). Comme les deux plans (P) et (P') sont orthogonaux, le projeté orthogonal de H sur (P') est cofondu avec le projeté orthogonal de H' sur (P). Le quadrilatère AHDH' est donc un rectangle. Soit δ la distance entre A et (d). δ est la longueur de la diagonale de ce rectangle. On applique le théorème de Pythagore : $\delta^2=\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=2$. D'où $\delta=\sqrt{2}$.

Exercice 2 **3 points**

1. **Restitution organisée de connaissances**
   Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;\ b]$ et dont les dérivées sont continues. Alors uv est dérivable et $(uv)'=u'v+uv'$.
   Par conséquent, $u'v=(uv)'-uv'$ et ce sont des fonctions continues d'où $\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x=\int_a^b[(uv)'(x)-u(x)v'(x)]\ \mathrm{d}x=\int_a^b(uv)'(x)\ \mathrm{d}x-\int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale) $=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x=u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$.
2. On pose $\mathrm{I}=\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin x\ \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos x\ \mathrm{d}x$.

   a. Première méthode : on pose $u'(x)=\mathrm{e}^x$ d'où $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=\sin x$ d'où $v'(x)=\cos x$.
   u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues. On effectue une intégration par parties :
   $\mathrm{I}=[\mathrm{e}^x\sin x]_0^\pi-\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{J}$ donc $\mathrm{I}=-\mathrm{J}$.

   Deuxième méthode :
   on pose $u(x)=\mathrm{e}^x$ donc $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et $w'(x)=\sin x$ d'où $w(x)=-\cos x$.
   u' et w' sont continues. On intègre par parties :
   $\mathrm{I}=[-\mathrm{e}^x\cos x]_0^\pi-\int_0^\pi -\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x=1+\mathrm{e}^\pi+\mathrm{J}$ donc $\mathrm{I}=1+\mathrm{e}^\pi+\mathrm{J}$.
   On obtient le système :
   $\left\{\begin{array}{l}\mathrm{I}=-\mathrm{J}\\\mathrm{I}=1+\mathrm{e}^\pi+\mathrm{J}\end{array}\right.$.
   On obtient : $\mathrm{I}=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^\pi)$ et $\mathrm{J}=-\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^\pi)$

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité Partie A

Soit (E) l'équation $z^3-(4+\text{i})z^2+(13+4\text{i})z-13\text{i}=0$.

1. On a : $\text{i}^3-(4+\text{i})\text{i}^2+(13+4\text{i})\text{i}-13\text{i}=-\text{i}+4+\text{i}-4+13\text{i}-13\text{i}=0$ donc i est solution de (E).
2. $(z-\text{i})(az^2+bz+c)=az^3+(b-a\text{i})z^2+(c-b\text{i})z-\text{i}c$.
   Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients sont égaux. On obtient le système :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a&=&1\\ b-a\text{i}&=&-4-\text{i}\\ c-b\text{i}&=&13+4\text{i}\\ -\text{i}c&=&-13\text{i}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a&=&1\\ c&=&13\\ b-\text{i}&=&-4-\text{i}\\ 13-b\text{i}&=&13+4\text{i}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a&=&1\\ b&=&-4\\ c&=&13\end{array}\right.$$
   donc $z^3-(4+\text{i})z^2+(13+4\text{i})z-13\text{i}=(z-\text{i})(z^2-4z+13)$.
3. L'équation (E) s'écrit $(z-\text{i})(z^2-4z+13)=0$.
   Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
   - $z-\text{i}=0 \Leftrightarrow z=\text{i}$
   - $z^2-4z+13=0$.
     $\Delta=-36=(6\text{i})^2<0$. Il y a deux racines complexes conjuguées $\dfrac{4-6\text{i}}{2}=2-3\text{i}$ et $2+3\text{i}$.

   L'ensemble des solutions est : $\mathscr{S}=\{\text{i}\ ;\ 2-3\text{i}\ ;\ 2+3\text{i}\}$

Partie B

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Une écriture complexe de r est $z'-z_{\text{B}}=\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(z-z_{\text{B}}) \Leftrightarrow z'=\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(z-2-3\text{i})+2+3\text{i}$.
   On en déduit $z_{\text{A}'}=\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(-2-2\text{i})+2+3\text{i}=-2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(10+\text{i})+2+3\text{i}=-2\text{i}\sqrt{2}+2+3\text{i}=2+\left(3-2\sqrt{2}\right)\text{i}$.
2. Les affixes de A', B et C ont la même partie réelle 2 donc les trois points sont alignés sur la droite d'équation réduite $x=2$.
   A' est donc l'image de C par une homothétie de centre B et de rapport k. $k>0$ donc $k=\dfrac{\text{BA'}}{\text{BC}}=\dfrac{3-(3-2\sqrt{2})}{3-(-3)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.
   Une écriture complexe de cette homothétie est alors :
   $z'=k(z-z_{\text{B}})+z_{\text{B}}$ c'est-à-dire $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(z-2-3\text{i})+2+3\text{i}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit σ la similitude directe de centre A qui transforme C en H.
   Le rapport de cette similitude est $k=\dfrac{\text{AH}}{\text{AC}}=\dfrac{|z_{\text{H}}-z_{\text{A}}|}{|z_{\text{C}}-z_{\text{A}}|}=\dfrac{|6\text{i}|}{8-8\text{i}|}=\dfrac{6}{8\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.
   Un angle de cette similitude est : $\left(\overrightarrow{\text{AC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AH}}\right)=\arg\left(\dfrac{z_{\text{H}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{C}}-z_{\text{A}}}\right)=\arg\left(\dfrac{-6\text{i}}{8-8\text{i}}\right)=\arg\left(-\dfrac{6}{8}\times\dfrac{\text{i}}{1-\text{i}}\right)=\arg\left(-\dfrac{3}{8}\times(-1+\text{i})\right)=\arg\left(\dfrac{3}{8}(1-\text{i})\right)=$
   $-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
   σ est la similutude directe de centre A, de rapport $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
2. **a.** s a pour écriture complexe $z'=a\overline{z}+b$.
   A et C sont invariants donc on a le système :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} z_{\text{A}}&=&a\overline{z_{\text{A}}}+b\\ z_{\text{C}}&=&a\overline{z_{\text{C}}}+b\end{array}\right..$$
   En soustrayant membre à membre, il vient : $z_{\text{A}}-z_{\text{C}}=a\left(\overline{z_{\text{A}}}-\overline{z_{\text{C}}}\right)$ donc $a=\dfrac{z_{\text{A}}-z_{\text{C}}}{\overline{z_{\text{A}}-z_{\text{C}}}}=\dfrac{-8+8\text{i}}{-8-8\text{i}}=\dfrac{-1+\text{i}}{-1-\text{i}}=\dfrac{-\text{i}(-1-\text{i})}{-1-\text{i}}=-\text{i}$.
   $b=z_{\text{A}}-a\overline{z_{\text{A}}}=-5+6\text{i}+\text{i}(-5-6\text{i})=-5+6\text{i}-5\text{i}+6=1+\text{i}$

s a pour écriture complexe : $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

s n'est pas l'identité et est une similitude indirecte ayant deux points invariants : c'est une symétrie axiale, d'axe (AC).

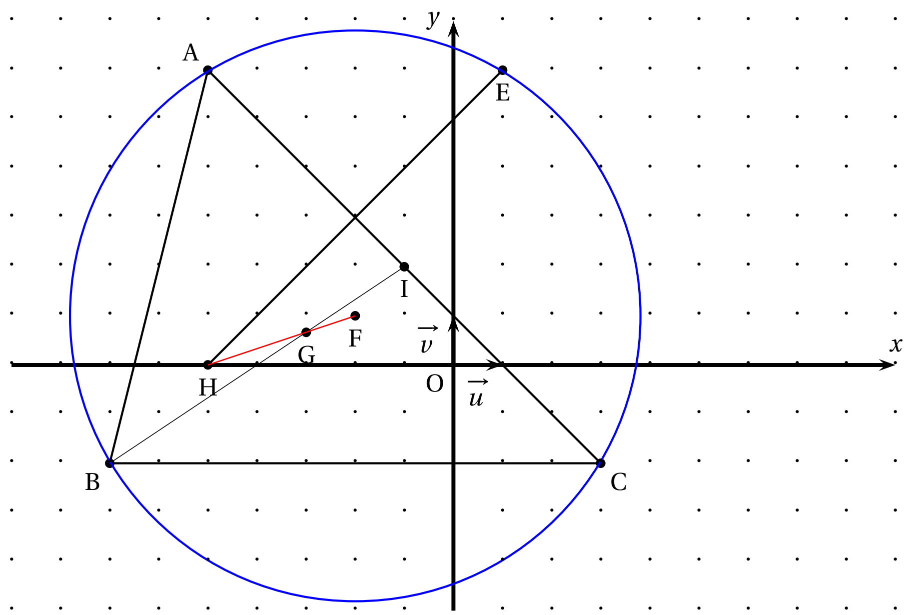
b. E est le symétrique de H par rapport à la droite (AC), donc E est l'image de H par s.
$z_\mathrm{E} = -\mathrm{i}\overline{z_\mathrm{H}} + 1 + \mathrm{i} = -\mathrm{i}(-5) + 1 + \mathrm{i} = 1 + 6\mathrm{i}$. $z_{\mathrm{E}=1+6\mathrm{i}}$.

c. Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est FA $= |z_\mathrm{A} - z_\mathrm{F}| = |-5 + 6\mathrm{i} + 2 - \mathrm{i}| = |-3 + 5\mathrm{i}| = \sqrt{34}$.
FE $= |z_\mathrm{E} - z_\mathrm{F}| = |1 + 6\mathrm{i} + 2 - \mathrm{i}| = |3 + 5\mathrm{i}| = \sqrt{34}$.
FE=FA donc E appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
(*Remarque : H est en fait l'orthocentre du triangle ABC et on a vérifié une propriété générale dans un triangle disant que le symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport à un côté de ce triangle appartient au cercle circonscrit*)

3. I est le milieu de [AC]. L'affixe de I est $z_\mathrm{I} = \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{C}}{2} = \dfrac{-5 + 6\mathrm{i} + 3 - 2\mathrm{i}}{2} = \dfrac{-2 + 4\mathrm{i}}{2} = -1 + 2\mathrm{i}$. $z_\mathrm{I} = -1 + 2\mathrm{i}$.

G est l'image de I par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$. (par conséquent, G est le centre de gravité du triangle, puisque l'on sait que celui-ci est aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet).
Cette homothétie a pour écriture complexe $z' - z_\mathrm{B} = \dfrac{2}{3}(z - z_\mathrm{B})$ donc $z = \dfrac{2}{3}(z + 7 + 2\mathrm{i}) - 7 - 2\mathrm{i}$.
Avec $z = z_\mathrm{I}$, on obtient $z_\mathrm{G} = \dfrac{2}{3}(-1 + 2\mathrm{i} + 7 + 2\mathrm{i}) - 7 - 2\mathrm{i} = \dfrac{2}{3}(6 + 4\mathrm{i}) - 7 - 2\mathrm{i} = 4 + \dfrac{8}{3}\mathrm{i} - 7 - 2\mathrm{i} = -3 + \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$. $z_\mathrm{G} = -3 + \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$.

Le vecteur $\overrightarrow{HG}$ a pour affixe $z_\mathrm{G} - z_\mathrm{H} = -3 + \dfrac{2}{3}\mathrm{i} + 5 = 2 + \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$.
Le vecteur $\overrightarrow{HF}$ a pour affixe $z_\mathrm{F} - z_\mathrm{H} = -2 + \mathrm{i} + 5 = 3 + \mathrm{i} = \dfrac{3}{2}\left(2 + \dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right) = \dfrac{3}{2}z_{\overrightarrow{\mathrm{HG}}}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HF}}$ sont donc colinéaires : les points H, G et F sont donc colinéaires.
(remarque : on a remontré dans un cas particulier que dans un triangle non équilatéral, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'othocentre d'un triangle sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler.)

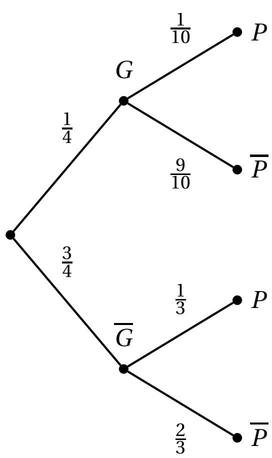


Exercice 4 **4 points**
Commun à tous les candidats
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

1. Supposons qu'il voie 5 clients et chaque rencontre est considérée comme une expérience identique, indépendante, pour laquelle la probabilité de vendre le produit est $p = 0,2$.

Si X est la variable aléatoire donnant le nombre de produits vendus, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5\ ;\ p)$.
Alors $p(X=2) = \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = 10 \times 0,2^2 \times 0,8^3 = 0{,}204\ 8$. (réponse d)).

2. Notons G l'événement « l'élève choisi est un garçon »et P l'événement « l'élève choisi a obtenu son permis ».
Représentons la situation par un arbre.



$P = (P \cap G) \cup (P \cap \overline{G})$ (réunion d'événements incompatibles).

Alors : $p(P) = p(P \cap G) + p(P \cap \overline{G}) = p_G(P) \times p(G) + p_{\overline{G}}(P) \times p(\overline{G}) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{40} = 0,275$. Réponse b).

3. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $p_P(G)$. $p_P(G) = \dfrac{p(G \cap P)}{p(P)} = \dfrac{\frac{1}{40}}{\frac{11}{40}} = \dfrac{1}{11} \approx 0,091$ à 0,001 près. C'est la réponse b).

4. Il faut calculer le quotient entre l'aire de la zone extérieure et l'aire totale.
$p = \dfrac{\pi \times 30^2 - \pi \times 10^2}{\pi \times 30^2} = \dfrac{900\pi - 100\pi}{900\pi} = \dfrac{500\pi}{900\pi} = \dfrac{500}{900} = \dfrac{5}{9}$. C'est la réponse a).

Il fallait répondre : d), b), b), a)

EXERCICE 5 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Partie A

1. f est dérivable comme composée, quotient et somme de fonctions dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
$f = u - \dfrac{\ln v}{v}$ en posant $u(x) = x$ et $v(x) = 1+x$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.
$$f' = u' - \left(\frac{\ln v}{v}\right)' = u' - \frac{\frac{v'}{v} \times v - v' \ln v}{v^2} = u' - \frac{1 - v' \ln v}{v^2}.$$
Par conséquent, pour tout x de $]-1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

2. On pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. N est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
$N'(x) = 2 \times 1 \times (1+x) + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2(1+x)^2 + 1}{1+x}$. Comme x appartient à $]+1\ ;\ +\infty[$, $1+x > 0$. Le numératuer est positif comme somme de nombres strictement positifs. Par conséquent, $N(x) > 0$ pour tout x. On en déduit que N est croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
$N(0) = 0$ donc $N(x) < 0$ pour tout x de $]-1\ ;\ 0[$ et $N(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
$f'(x) = \dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$ qui est du signe du numérateur $N(x)$ car $(1+x)^2 > 0$ pour tout x.
Par conséquent, $f'(x) < 0$ sur $]-1\ ;\ 0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = x$. Pour avoir les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$, on résout l'équation $f(x) = x$.
$f(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Comme $f(0) = 0$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ se coupent à l'origine.

Partie B

1. Sur l'intervalle $[0~;~4]$, f est croissante donc pour tout x de $[0~;~4]$, $0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$; or $f(4) = 4 - \dfrac{\ln 5}{5} < 4$ donc $f(x) \in [0~;~4$.

2. **a.** Voir courbe.

b. Montrons par récurrence sur n, que, pour tout n, $u_n \in [0~;~4]$.

- Amorçage : $u_0 = 4 \in [0~;~4]$ donc c'est vrai au rang 0.
- Hérédité : supposons que $u_n \in [0~;~4]$ pour un entier n. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0~;~4]$ d'après 1.

Par conséquent, $u_n \in [0~;~4]$ pour tout n.

c. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \leqslant 0$ car $1 + u_n \geqslant 1$ d'où $\ln(1+u_n) \geqslant 0$.
Par conséquent, la suite (u_n) est décroisssante.

d. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente vers un réel ℓ.

e. Comme f est continue, on sait que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. On en déduit que $\ell = 0$.