

∞ Baccalauréat S Polynésie septembre 2004 ∞

EXERCICE 1

5 points

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$

1. a. La fonction affine $1 - x$ est dérivable; $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ est le quotient de deux fonctions dérivable, la seconde ne s'annulant pas sur $]0; +\infty[$. f est donc dérivable sur cet intervalle et :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times \sqrt{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} - 1 = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} - 1 = \frac{2 - \ln x - 2x \ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{-[\ln x + 2(x \ln x - 1)]}{2x\sqrt{x}}$$

Or $x\sqrt{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $-[\ln x + 2(x \ln x - 1)] = N(x)$.

- b. $N(1) = 0$. Si $x > 1$, $\sqrt{x} > 1$ (par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$) et par produit $x\sqrt{x} > 1 \iff x\sqrt{x} - 1 > 0 \iff 2(x\sqrt{x} - 1) > 0$. De plus si $x > 1$, alors $\ln x > 0$ et par somme, puis opposé $N(x) < 0$.
Le même raisonnement avec $0 < x < 1$ conduit à $N(x) > 0$.

- c. Conclusion : la fonction f est croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. Le maximum de f est obtenu quand la dérivée s'annule en changeant de signe, donc en 1 et il vaut $f(1) = 0$. La fonction f est donc négative sur l'intervalle étudié.

2. a. D'après le résultat précédent $\mathcal{A}(\alpha) = -\int_{\alpha}^1 f(x) dx$. Pour la fonction quotient on intègre par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2 \ln x & v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ u'(x) &= \frac{2}{x} & v(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

u et v étant dérivables et u' et v' continues, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 \frac{2 \ln x}{2\sqrt{x}} dx &= [2 \ln x \sqrt{x}]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx. \text{ Or } \int_{\alpha}^1 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = \int_{\alpha}^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \\ &4 \int_{\alpha}^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [4\sqrt{x}]_{\alpha}^1. \end{aligned}$$

$$\text{Finalement } \mathcal{A}(\alpha) = \left[2 \ln x \sqrt{x} - 4\sqrt{x} + x - \frac{x^2}{2} \right]_1^{\alpha} =$$

$$\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - 4\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\alpha} \ln \alpha + \frac{7}{2}.$$

- b. On sait que $\alpha > 0$. On peut donc poser $\alpha = \beta^2$ avec $\beta > 0$. Donc $\sqrt{\alpha} \ln \alpha = \sqrt{\beta^2} \ln \beta^2 = \beta \times 2 \ln \beta$. La fonction carré étant continue, si α tend vers zéro, β aussi, et on sait que $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \ln \beta = 0$. La limite des quatre premiers termes est nulle, donc finalement :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha) = \frac{7}{2}.$$

Géométriquement, cette limite correspond à la mesure de la surface limitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. a. On a $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln 2$ et
 $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2} \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$ et par produit :
 $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \sqrt{2} < 1$.

b. Par récurrence : $1 \leq u_0 \leq 2$. L'appartenance est vraie au rang zéro.

Hérédité : si $1 \leq u_n \leq 2$, d'après le a. $0 \leq \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} \leq 1 \iff$

$$1 \leq \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1 \leq 2 \iff 1 \leq u_{n+1} \leq 2.$$

On a bien démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1 ; 2]$.

4. Comme $u_{n+1} = f(u_n) + u_n \iff u_{n+1} - u_n = f(u_n)$ et que l'on a démontré au

1. c. que f est négative, on montre aussi que la suite (u_n) est décroissante.

5. a. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que $1 \leq \ell$.

b. Or par continuité de la fonction f dérivable, la relation $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ donne à la limite $\ell = f(\ell) + \ell \iff f(\ell) = 0$.

Or on a vu à la question 1. c. que la seule valeur qui annule f est le nombre 1. Conclusion $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1$.

EXERCICE 2

5 points

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. a. $M'' = M \iff z^2 = z \iff z(z-1) = 0 \iff \begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Les points solutions sont donc l'origine et le point d'affixe 1.

b. $M'' = M' \iff z^2 = z - 2 \iff z^2 - z + 2 = 0$; $\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$.

On trouve deux solutions : les points d'affixes $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$.

2. z' est imaginaire si $x + iy - 2$ est imaginaire, i.e. si $x = 2$.

z'' est imaginaire si $x^2 - y^2 + 2ixy$ est imaginaire, i.e. si $x^2 - y^2 = 0$ et compte-tenu de la condition précédente si $4 - y^2 = 0 \iff y = -2$ ou $y = 2$.

Il y a donc deux points $M_1(2+2i)$ et $M_2(2-2i)$ dont les images M' et M'' appartiennent à l'axe des ordonnées et les affixes de ces points sont conjuguées.

3. a. $\frac{z'' - z}{z' - z} = \frac{z^2 - z}{z - 2 - z} = \frac{x^2 - y^2 + 2ixy - x - iy}{-2}$.

b. Les points M , M' et M'' sont alignés si ce complexe est un réel, donc si $2xy - y = 0 \iff y(2x - 1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

$$E = \{M(z) \text{ avec } z = x \text{ ou } z = \frac{1}{2} + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

4. a. L'ensemble Γ des points M d'affixe $z = \sqrt{3}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est le premier quart de cercle (dans le sens direct) de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

L'ensemble Γ' des points M' correspondants est le quart de cercle translaté de Γ dans la translation de vecteur $-2\vec{u}$.

Les points M'' on pour affixes $z'' = z^2 = 3e^{i2\theta}$. L'ensemble Γ'' des points M'' est donc le demi-cercle (direct) de centre O, de rayon 3.

b. Cf. figure

c. Avec $\theta = \frac{\pi}{6}$, $z_3 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$z'_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z''_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

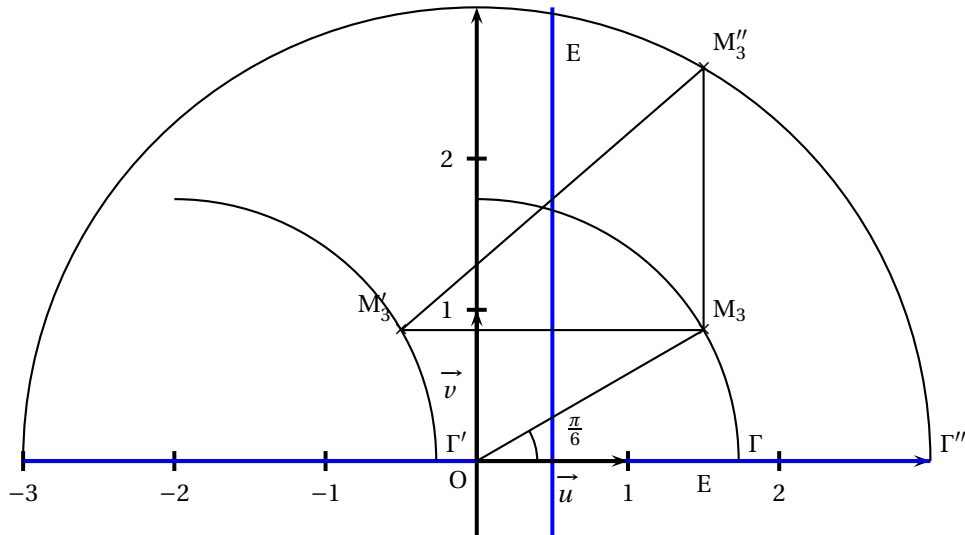
M_3 et M'_3 ont la même ordonnée ; la droite $(M_3M'_3)$ est donc horizontale ; M_3 et M''_3 ont la même abscisse ; la droite $(M_3M''_3)$ est donc verticale et le triangle $M_3M'_3M''_3$ est donc rectangle en M_3 .

$$M_3M'_3{}^2 = 4;$$

$$M_3M''_3{}^2 = 3;$$

$$M'_3M''_3{}^2 = 7.$$

Donc le triangle n'est pas isocèle.



EXERCICE 2

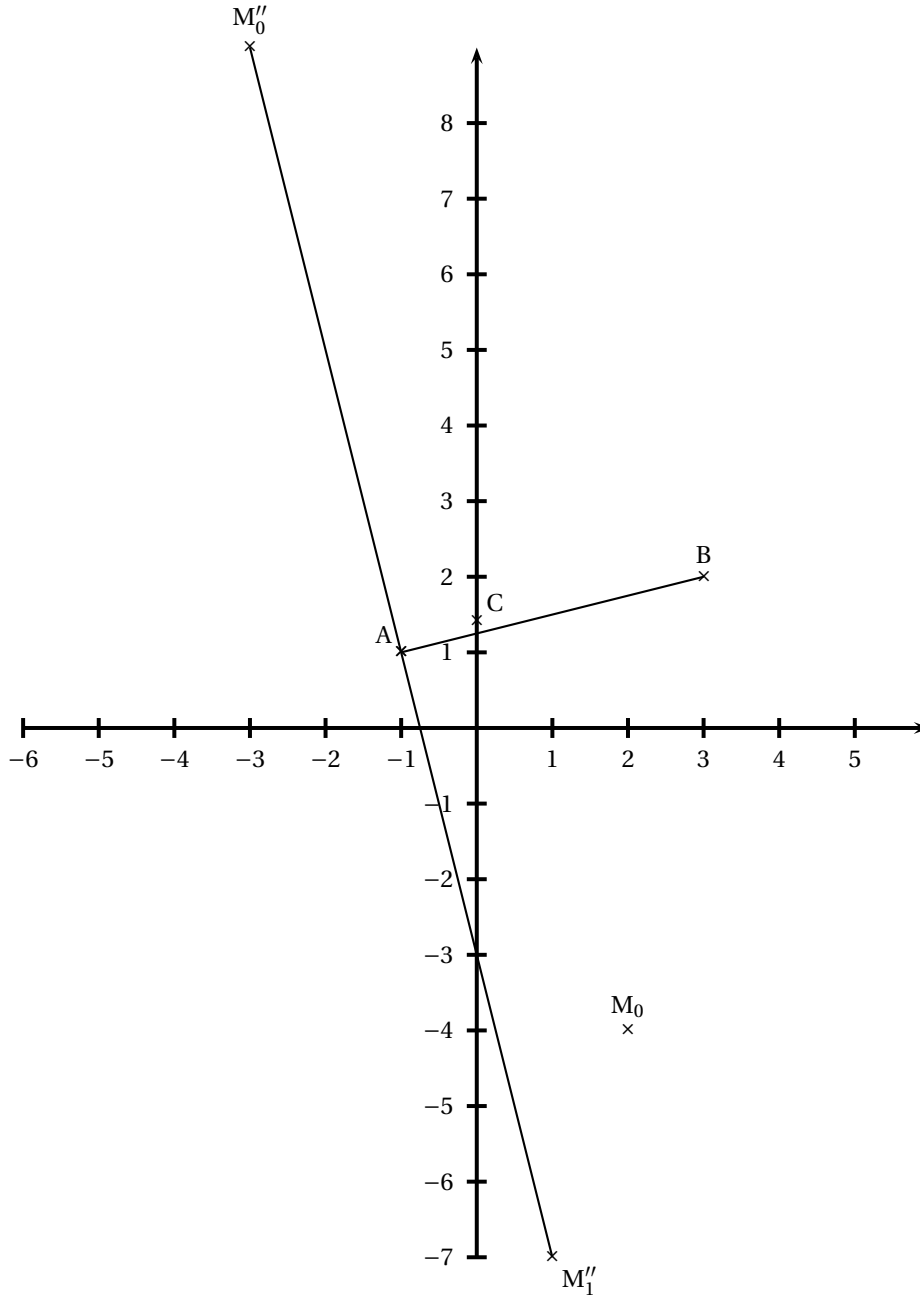
5 points

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1. a. $z_{A'} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = -1 + i = z_A$.
 $z_{C'} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(-i\sqrt{2}) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = i\sqrt{2} = z_C$.
 b. La transformation f est une similitude indirecte qui conserve les deux points A et C : c'est donc une symétrie orthogonale d'axe la droite (AC).
 c. $z_{B'} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(3-2i) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = \frac{3}{2} + i\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$. Voir la figure.
2. $\overrightarrow{AM'} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$ se traduit par $z' + 1 - i = \sqrt{2}(z + 1 - i)$, d'où $z' = z\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + i(1 - \sqrt{2})$.
3. On a $z'' = f[h(z)] = f[z\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + i(1 - \sqrt{2})] = \frac{1+i}{\sqrt{2}}[z\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + i(1 + \sqrt{2})] - 1 + i(1 + \sqrt{2}) = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$. C'est encore l'écriture d'une similitude indirecte.
4. a. En utilisant l'égalité précédente, on a $z''_0 = (1+i)(2+4i) - 1 + 3i = -3 + 9i$. \overrightarrow{AB} a pour composantes (4; 1) et $\overrightarrow{AM''_0}$ a pour composantes (-2; 8). Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM''_0} = -8 + 8 = 0$, donc ces vecteurs sont orthogonaux, donc M''_0 appartient à la perpendiculaire à la droite (AB) contenant A.
 b. Soient les points $M(z = x + iy)$ avec $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$.
 $z'' = (1+i)(x - iy) + 3i - 1 = x + y - 1 + i(x - y + 3)$.
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM''} = 0 \iff 4(x+y) + 1(x-y+2) = 4x + 4y + x - y + 2 = 0 \iff 5x + 3y = -2$.
- c. Le couple (-1; 1) est une solution évidente de cette équation. On a donc :

$$\begin{cases} 5x + 3y = -2 \\ 5 \times (-1) + 3 \times 1 = -2 \end{cases} \implies 5(x+1) + 3(y-1) = 0 \iff 5(x+1) = 3(1-y)$$
 3 divise $3(1-y)$, donc aussi $5(x+1)$; 3 étant premier avec 5 divise (Gauss) $1-y$. Il existe donc un entier k tel que $x+1 = 3k \iff x = -1 + 3k$ et en reportant dans l'équation on obtient $y = 1 - 5k$.
 Les couples d'entiers solutions sont tous les couples de la forme $(-1 + 3k; 1 - 5k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
 d. On a $-6 \leq y \leq 6 \iff -6 \leq 1 - 5k \leq 6 \iff -6 \leq 5k - 1 \leq 6 \iff -5 \leq 5k \leq 7 \iff -1 \leq k \leq \frac{7}{5}$.

Seules conviennent les valeurs -1 , 0 et 1 , qui donnent respectivement les couples de coordonnées $(-4; 6)$, $(-1; 1)$ et $(2; -4)$. Les points M'' correspondants ont pour coordonnées $(1; -7)$, $(-1; 1)$ et $(-3; 9)$. Le couple $(-1; 1)$ correspond au point A. Il n'y a donc que deux solutions (on retrouve le point M_0''). Voir la figure.



EXERCICE 3

5 points

(Commun à tous les candidats)

1. La plus petite somme $a + b$ est égale à -3 , soit $a + b > -4 \iff a + b + 4 > 0$. La somme des coefficients est non nulle : le barycentre G existe quel que soit le tirage.
2. a. G appartient à la droite (BC) si et seulement si le coefficient de A, soit a est nul ; donc $p(E_1) = \frac{1}{6}$.
G appartient au segment [BC] si et seulement si $a = 0$ et si $b > 0$; on a donc $p(E_2) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{15}$.

- b.** G est strictement intérieur au triangle si les trois coefficients sont supérieurs à zéro, donc si $a > 0$ et $b > 0$. On a donc $p(E_3) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$.
- 3. a.** On sait que $E(X) = pn = \frac{2}{5} \times n = 4 \iff n = 10$.
- b.** La probabilité de n'avoir aucun barycentre intérieur au triangle est $\left(\frac{3}{5}\right)^n$, donc la probabilité d'en avoir au moins un est $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Il faut donc que $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n \geq 0,999 \iff \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0,001 \iff n \ln\left(\frac{3}{5}\right) \leq \ln 0,001 \iff n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 13,5$.
- Conclusion : il faut répéter l'expérience 14 fois.