

EXERCICE 1

5 points

Partie A

1. On a $f(x) = e^2 \times \frac{x}{e^x}$; f est donc le quotient de deux fonctions dérivables (la seconde ne s'annulant pas) : elle est donc dérivable sur $[0; +\infty[$.
 $f'(x) = e^{-x+2} - xe^{-x+2} = (1-x)e^{-x+2}$ qui est du signe de $1-x$ car $e^{-x+2} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

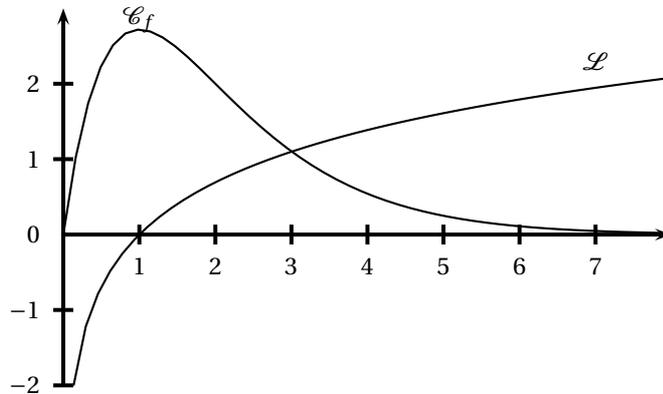
| | | | | | |
|---------|---|---|---|---|-----------|
| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | | ↘ | 0 |

Limites aux bornes : $f(x) = e^2 \times \frac{x}{e^x}$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de plus l'infini.

D'autre part $f(0) = 0 \times e^2 = 0$ et $f(1) = e^1 = e$.

2. a. Sur la calculatrice l'examen des deux courbes permet de conjecturer à l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$.



- b. Si $g(x) = \ln x - f(x)$ différence de deux fonctions dérivables sur $[1; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $g'(x) = \frac{1}{x} - (1-x)e^{-x+2}$. Or d'après la question 1., $f'(x) = (1-x)e^{-x+2} \leq 0$ sur $[1; +\infty[$, donc $-(1-x)e^{-x+2} \geq 0$ et comme $\frac{1}{x} > 0$, $g'(x) > 0$ sur $[1; +\infty[$.

La fonction g continue est donc croissante sur $[1; +\infty[$.

De plus $g(1) = -f(1) = -e < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Il existe donc un réel unique $\alpha > 1$ tel que $g(\alpha) = 0 \iff \ln \alpha = f(\alpha)$.

- c. La calculatrice permet d'appréhender α au millième : $\alpha \approx 3,005$.

Partie B

1. On intègre par parties avec :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = e^{-2x} \\ u'(x) = 2x & v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle d'intégration.

$$\text{Donc } I = \left[-x^2 \times \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^3 + \int_0^3 x e^{-2x} dx.$$

On intègre cette dernière intégrale à nouveau par parties :

$$\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = e^{-2x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{cases}$$

, les fonctions u et v étant dérivables et les fonctions u' et v' étant continues sur l'intervalle d'intégration. On obtient finalement $I = \left[-x^2 \times \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^3 -$

$$\left[x \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^3 - \frac{1}{2} \left[e^{-2x} \right]_0^3 = -\frac{9}{2} e^{-6} - \frac{3}{2} e^{-6} - \frac{1}{4} e^{-6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{25}{4} e^{-6}.$$

2. a. On a $\mathcal{V} = \int_0^3 \pi [f(x)]^2 dx = \int_0^3 \pi x^2 e^{-2x+4} dx = \pi e^4 \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx = \pi e^4 \times I$
(en unités de volume).

b. L'unité de volume est égale à $4^3 = 64 \text{ (cm}^3\text{)}$. D'où

$$\mathcal{V} = \pi e^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{25}{4} e^{-6} \right) \times 64 = 16\pi e^4 - 400\pi e^{-2} \approx 2\,574 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

EXERCICE 2

5 points

1. a. ABC' est un triangle équilatéral. $[BC']$ est l'image de $[BC]$ dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ s'écrit en notation complexe : $c' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b)$.

b. On obtient de même avec les deux autres triangles équilatéraux :

$$b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) \text{ et } a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c).$$

En ajoutant membre à membre les trois égalités précédentes :

$$c' - b + b' - a + a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b + c - a + b - c) \iff a' + b' + c' = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 0.$$

Ou encore $a' + b' + c' = a + b + c$.

2. Les points P, Q et R sont les centres de gravité ou les isobarycentres des sommets respectifs des trois triangles équilatéraux ; donc :

$$p = \frac{b+c+a'}{3}, \quad q = \frac{c+a+b'}{3}, \quad r = \frac{a+b+c'}{3} \text{ soit en sommant : } p+q+r = \frac{b+c+a'+c+a+b'+a+b+c'}{3} = \frac{b+c+c+a+a+b+a+b+c}{3} = \frac{3(a+b+c)}{3} = a+b+c.$$

3. On a donc $a+b+c = a'+b'+c' = p+q+r \iff \frac{a+b+c}{3} = \frac{a'+b'+c'}{3} = \frac{p+q+r}{3}$. Cette double égalité se traduit géométriquement par : les triangles $ABC, A'B'C', PQR$ ont le même centre de gravité.

4. D'après la question 2. $3p = b+c+a'$ et $3q = c+a+b'$ soit par différence $3(q-p) = c+a+b'-b-c-a' = (b'-c) + (c-a') + (a-b)$. De même $3(r-p) = (a-c) + (b-a') + (c'-b)$.

5. A est l'image de C' dans la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, se traduit par $a - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b' - c)$. De même B est l'image de C dans la rotation de centre A', soit $b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a')$ et d'après la question 1. a. $c' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b)$.

6. On a admis à la question 4. que $3(r-p) = (a-c) + (b-a') + (c'-b)$. Soit d'après la question précédente : $3(r-p) = e^{i\frac{\pi}{3}}[(b'-c) + (c-a') + (a-b)] = 3e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$, ce qui signifie que R est l'image du point Q dans la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{3}$, soit PQR est un triangle équilatéral.

EXERCICE 3 (OBLIGATOIRE)

5 points

1. a. On a $z_{E'} = \frac{-1}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = (-1) \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (écriture exponentielle).
 $z_{E'} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. (écriture algébrique).
- b. $M(z) \in \mathcal{C}_1 \iff z = e^{i\theta}$. Donc l'image M' de M a une affixe $z' = \frac{-1}{e^{-i\theta}} = (-1) \times e^{i\theta} = e^{i\pi} \times e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$. Le point M' est donc le symétrique de M autour de O et l'image de \mathcal{C}_1 est donc \mathcal{C}_1 .
2. a. $z_{K'} = \frac{-1}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = (-1) \times \frac{1}{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2} e^{i\pi} \times e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2} e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{1}{4}$.
- b. $M(z) \in \mathcal{C}_2 \iff z = 2e^{i\theta}$ (avec $0 \leq \theta < 2\pi$). Donc son image M' a une image d'affixe $z' = \frac{-1}{2e^{-i\theta}} = (-1) \times \frac{1}{2} e^{i\theta} = \frac{1}{2} e^{i\pi} \times e^{i\theta} = \frac{1}{2} e^{i(\pi+\theta)}$. Ceci signifie que M' appartient au cercle \mathcal{C}'_2 de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.
3. a. Avec $z = 1 + e^{i\theta}$, on a $z' = \frac{-1}{z}$, donc $z' + 1 = \frac{-1}{z} + 1 = \frac{\bar{z} - 1}{z}$.
 En prenant les modules, on obtient :
 • $|z' + 1| = \left| \frac{\bar{z} - 1}{z} \right| = \frac{|\bar{z} - 1|}{|z|} = \frac{|e^{i\theta}|}{|z|} = \frac{1}{|z|}$. D'autre part
 • $z' = \frac{-1}{z}$ entraîne que $|z'| = \left| \frac{-1}{z} \right| = \frac{|-1|}{|z|} = \frac{1}{|z|}$ soit la même expression qu'au dessus.
 On a donc bien $|z' + 1| = |z'|$.
- b. Si un point M a pour affixe $1 + e^{i\theta}$, son image M' a une affixe z' telle que d'après le résultat du a. $|z' + 1| = |z'| \iff |z' - (-1)| = |z' - 0|$ qui se traduit géométriquement par : $M'B = M'O$ qui signifie que le point M' appartient à la médiatrice de $[OB]$.

EXERCICE 3 (SPÉCIALITÉ)

5 points

1. Réponse : vraie.

$$\begin{cases} 4\,002 &= 2\,004 \times 1 + 1\,998 \\ 2\,004 &= 1\,998 \times 1 + 6 \\ 1\,998 &= 6 \times 336 + 0 \end{cases}$$
 . Le dernier reste non nul est bien 6
2. Réponse : vraie.
 $2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^q)^p - 1$ et ce nombre est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$ (car $a^m - 1$ est divisible par $a - 1$).
3. Réponse : fausse.
 Contre-exemple : $2^6 - 1 = 63$ est divisible par 9.
4. Réponse : fausse.
 $24 \times (70k - 144) + 36(99 - 24k) = 108 + 816k \neq 9$.
 En fait on trouve que $24 \times (-16) + 35 \times 11 = 1$ et par suite que les solutions sont tous les couples $(35k - 144 ; 99 - 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
5. Réponse : fausse.
 Soit M un point du plan ; son image M_1 par f vérifie $\overrightarrow{AM_1} = 3\overrightarrow{AM}$. Puis l'image M' de M_1 par g vérifie $\overrightarrow{BM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM_1}$. Or $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BM_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_1}) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \times 3\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
6. Réponse : vraie.
 Les points invariants vérifient $z = i\bar{z} + (1 - i)$ soit avec $z = x + iy$, $x + iy =$

$$i(x - iy) + (1 - i) \iff \begin{cases} x = y + 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \text{ qui est bien} \\ \text{l'équation d'une droite.}$$

EXERCICE 4**5 points**

1. Avec l'évènement M : « être malade » et T l'évènement : « être positif au test », en dressant un arbre de probabilités pondérées, on obtient :

$$p(T) = p(M \cap T) + p(M \cap \bar{T}) = 0,003 \times 0,5 + 0,03 \times 0,997.$$

$$\text{On a donc } p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0,003 \times 0,5}{0,003 \times 0,5 + 0,03 \times 0,997} \approx 0,0468 \approx 0,05. \text{ (réponse 4)}$$

2. La boule subit une épreuve de Bernouilli avec $n = 3$ et $p = 0,3$ (ou $0,7$).

$$\text{On a } p(R_1) = 0,3^3; p(R_2) = 3 \times 0,3^2 \times 0,7; p(R_3) = 3 \times 0,7^2 \times 0,3; p(R_4) = 0,7^3.$$

$$\text{On obtient puisque les issues sont disjointes : } p_1 = p(R_1) + p(R_3) = 0,468 \text{ et } p_2 = p(R_2) + p(R_4) = 0,532. \text{ (réponse 3)}$$

3. On calcule :

$$d^2 = (0,093 - 0,1)^2 + (0,116 - 0,1)^2 + (0,102 - 0,1)^2 + (0,102 - 0,1)^2 + (0,094 - 0,1)^2 + (0,094 - 0,1)^2 + (0,097 - 0,1)^2 + (0,095 - 0,1)^2 + (0,101 - 0,1)^2 + (0,106 - 0,1)^2 = 0,000\,456.$$

On a $0,000\,456 < 0,001\,45$ soit $d^2 < d_9$, donc il accepte cette hypothèse avec un risque de 10 % de la rejeter.