

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2006 ∞

EXERCICE 1

3 points

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

A de coordonnées $(3 ; 1 ; -5)$, B de coordonnées $(0 ; 4 ; -5)$, C de coordonnées $(-1 ; 2 ; -5)$ et D de coordonnées $(2 ; 3 ; 4)$.

Pour chacune des six affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée. Le candidat doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la mention « VRAI » ou « FAUX ». On attribue 0,5 point par réponse correcte et on retranche 0,25 point par réponse incorrecte.

L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Les points A, B et D sont alignés.
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires.
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD).
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \frac{7}{2} + k, \\ z = -\frac{1}{2} - 9k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. Question de cours

On rappelle que : « Pour tout vecteur \vec{w} non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$ ».

Soient M , N et P trois points du plan, d'affixes respectives m , n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a. Démontrer que : $\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\frac{p-m}{n-m}\right|$

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 4 + i, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 5i \text{ et } z_D = -3 - i.$$

Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i.$$

- a. Préciser les images des points A et B par f .
- b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω , dont on précisera l'affixe ω .
4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z , on a :

$$z' - z = -2i(2 - i - z).$$

- b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω , la valeur de $\frac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$
- c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?
- d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - i\sqrt{3}$. Écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Rappel :

Pour deux entiers relatifs a et b , on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod{7}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

- Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*
 - Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
Démontrer que : si $a \equiv b \pmod{7}$ et $c \equiv d \pmod{7}$ alors $ac \equiv bd \pmod{7}$.
 - En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a \equiv b \pmod{7}$ alors pour tout entier naturel n , $a^n \equiv b^n \pmod{7}$.
- Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \pmod{7}$.
- Soit a un entier naturel non divisible par 7.
 - Montrer que : $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
 - On appelle *ordre* de $a \pmod{7}$, et on désigne par k , le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod{7}$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod{7}$.
En déduire que k divise 6.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?
 - Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
- À tout entier naturel n , on associe le nombre

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \pmod{7}$.

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.

Dn définit les événements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.
 - a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?
 - b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?
 - c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes,
 - d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.
2. Probabilités conditionnelles
 - a. Montrer que : $P_B(J_n) = \binom{50}{n} 2^{-50}$.
 - b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
 - c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé. Établir que :

$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}.$$

- d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0,9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

EXERCICE 4**8 points****Commun à tous les candidats**

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

- a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n .
 - b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1; e]$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
 - a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n; 0)$.
 - b. Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 .
 - c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n .
 - d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n) .
 3.
 - a. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n .
 - b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :
 $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
 - c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n) .
 - d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que :
 $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ .

4. On désigne par \mathcal{D}_n le domaine délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.

a. Calculer l'aire du domaine \mathcal{D}_n en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\frac{\alpha_n^2}{n}$.

b. Établir que :

$$(e - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \frac{\alpha_n^2}{n} \leq (e - \alpha_n).$$

c. En déduire un encadrement de $n(e - \alpha_n)$.

d. La suite de terme général $n(e - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?