

∞ Baccalauréat S Pondichéry 31 mars 2005 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f , définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{e^t}{t}.$$

1. **a.** Justifier la continuité de f sur $[1 ; +\infty[$.
- b.** Montrer que f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

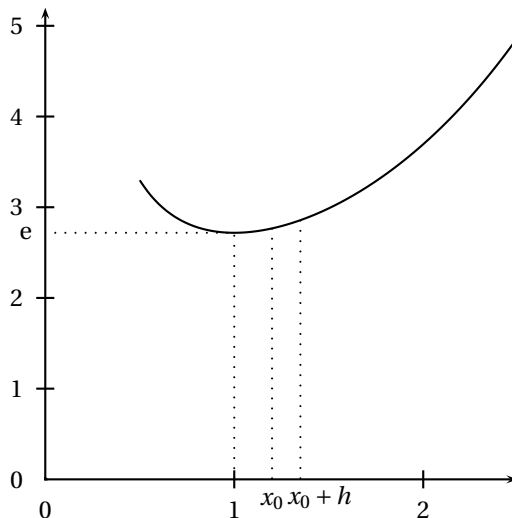
Pour tout réel x_0 de $[1 ; +\infty[$, on note $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1 ; +\infty[$ est une primitive de f .

- a.** Que vaut $\mathcal{A}(1)$?
- b.** Soit x_0 un réel quelconque de $[1 ; +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

- c.** Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geq 1$?
- d.** En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction \mathcal{A} ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction \mathcal{A} .
- e.** Conclure.



EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $-2 + 2i$ et par (\mathcal{C}) le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle (\mathcal{C}) et calculer son rayon.
2. Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$.
Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (\mathcal{C}) .
3. Sur le cercle (\mathcal{C}) , on considère le point E, d'affixe z_E , tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\frac{\pi}{4}$.
 - a. Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.
 - b. En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.
4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right).$$

- a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.
- b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.
Déterminer par le calcul l'image de K par r . Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .
Démontrer que :
$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$
2.
 - a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
 - b. Quelle est la nature de l'application f ?
3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
 - a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant à \mathbb{Z}^2 de l'équation $4x - 3y = 2$.
 - b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à \mathbb{Z}^2 de l'équation $4x - 3y = 2$.
5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z' .
Déterminer les entiers y tels que $\operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1; 0; 2)$, $(1; 1; 4)$ et $(-1; 1; 1)$.

1.
 - a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées (3 ; 4 ; -2).
Vérifier que le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
 - a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
 - b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?
3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t .
 - a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t .
Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
Exprimer le vecteur \vec{IG} en fonction du vecteur \vec{IC} .
 - b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.
Pour quelle valeur de t , le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

EXERCICE 4**6 points****Commun à tous les candidats**

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}.$$

- a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f .
- b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $]1 ; +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
- c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.
- d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

3.
 - a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.
 - b. Que peut-on en déduire pour la suite ?
4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.