Corrigé du baccalauréat S Asie juin 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A. Restitution organisée de connaissances

On a $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\times z'\right)=\arg z \iff \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)+\arg z'=\arg z \iff \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'$.

Partie B

1. **a.** M d'affixe z (avec $z\neq -\mathrm{i}$) est invariant par f si et seulement si $z=\dfrac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}} \iff z^2+\mathrm{i}z=\mathrm{i}z+3 \iff z^2=3$. Les points invariants sont donc les points J et K d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
Le cercle de diamètre [AB] a pour rayon 2 et pour centre le point d'affixe i. Or la distance de ce point à J est égale à $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$, donc J appartient au cercle de diamètre [AB]. Même calcul pour K.

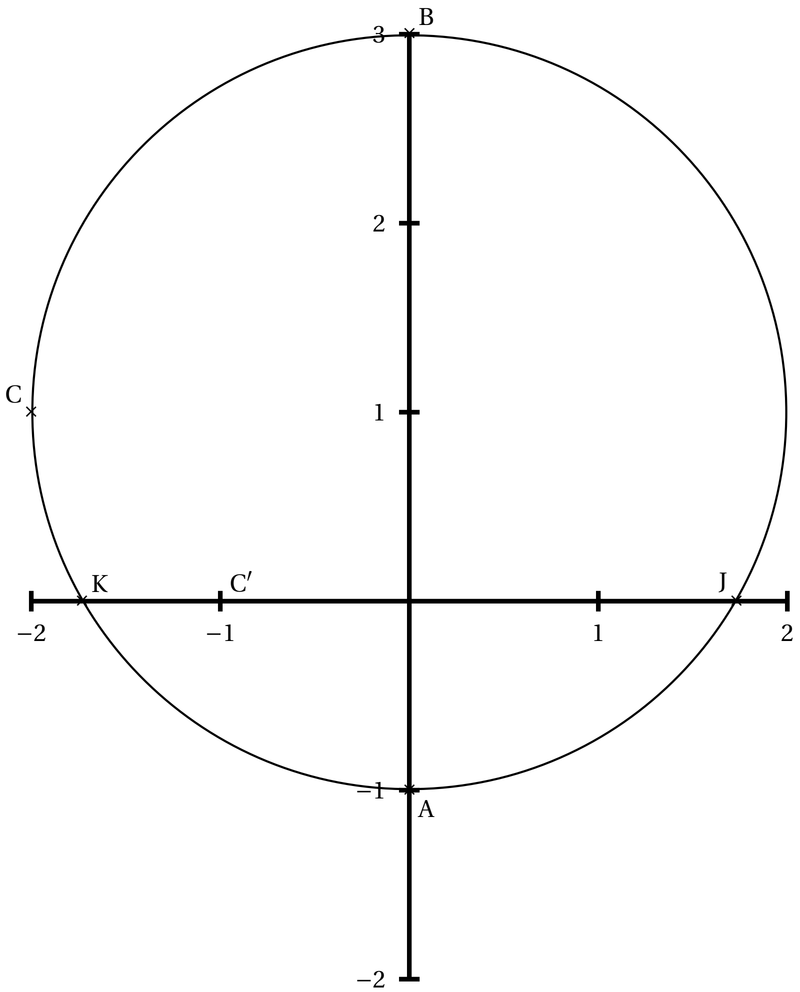
b. Si c' est l'affixe de C′, alors $c'=\dfrac{\mathrm{i}(-2+3\mathrm{i}}{-2+\mathrm{i}+\mathrm{i}}=\dfrac{2-2\mathrm{i}}{-2+2\mathrm{i}}=-1$. Donc C′ appartient à l'axe des abscisses.

2. On peut écrire $z'=\dfrac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(z-3\mathrm{i})}{z-(-\mathrm{i})}$. En prenant les arguments de ces deux complexes (et en utilisant le résultat de la partie A) on obtient $\arg(z')=\arg\mathrm{i}+\arg\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z-(-\mathrm{i})}\right)$ à 2π près $\iff \arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M}\right)$ à 2π près $\iff$
$\arg(z')=\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)+\dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.

3. **a.** z' est imaginaire pur si et seulement si son argument est $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$. Les points M correspondants sont tous les points de la droite (AB) excepté les points A et B.

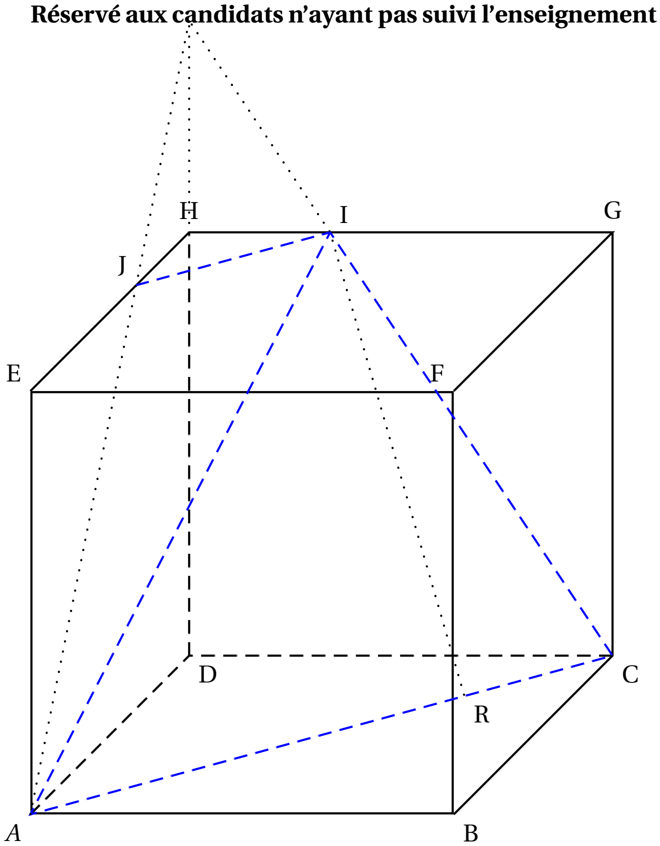
b.
- Si M appartient au demi-cercle contenant K, alors $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ et par conséquent $\arg(z')=\pi$, donc M' a une affixe réelle négative.
- Si M appartient au demi-cercle contenant J, alors $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ et par conséquent $\arg(z')=0$, donc M' a une affixe réelle positive.

Dans tous les cas si M appartient au cercle de diamètre [AB] privé des points A et B, le point M' appartient à l'axe des abscisses.
Autre méthode numérique : Si M appartient au cercle de diamètre [AB], son affixe s'écrit $z=\mathrm{i}+2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta\in[0\ ;\ 2\pi]$. On trouve alors que
$z'=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\in\mathbb{R}$.



Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



1. Voir figure
2. Construction du point J :
   – Dans le plan CDHG, la droite (IC) coupe la droite (DH) en un point P ;
   – Dans le plan ADHE la droite (PA) coupe la droite (EH) en J.
   Le plan (ACI) est donc coupé par les deux faces parallèles (ABCD) et (EFGH) : les intersections (AC) et(IJ) sont donc parallèles.
3. **a.** R ∈ (AC) : on sait qu'il existe un réel unique k tel que $\overrightarrow{\text{AR}} = k\overrightarrow{\text{AC}}$, ce réel k étant l'abscisse de R si lerepère de la droite (AC)est le couple (A, C).
   (IR) ⊥ (AC) $\iff \overrightarrow{\text{IR}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0$.

   b. Si R a pour coordonnées $(x,\ y,\ z)$, $\overrightarrow{\text{AR}} = k\overrightarrow{\text{AC}} \Longrightarrow x = k,\ y = k,\ z = 0$.
   $\overrightarrow{\text{IR}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0 \iff \left(x - \dfrac{1}{3}\right) \times 1 + (y-1) \times 1 + (z-1) \times 0 = 0 \iff x - \dfrac{1}{3} + y - 1 = 0.$
   D'où en remplaçant par les coordonnées de R : $2k - \dfrac{4}{3} = 0 \iff k = \dfrac{2}{3}$.
   Conclusion : $\text{R}\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ 0\right)$.

   c. On calculeIR$^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + 1^2 = \dfrac{11}{9} \Longrightarrow \text{IR} = \dfrac{\sqrt{11}}{3}$.
4. $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(3\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est normal au vecteur $\overrightarrow{\text{AC}}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ (produit scalaire nul) et au vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}\,\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACI) est un vecteur normal à ce plan.
   Une équation du plan (ACI) est donc $3x - 3y + 2z + d = 0$ et comme ce plan contient A$(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $d = 0$.
   Une équation du plan (ACI) est donc : $3x - 3y + 2z = 0$.
5. Avec F$(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ on sait que $d(\text{F, ACI}) = \dfrac{|3 \times 1 - 3 \times 0 + 2 \times 1|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{22}}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Si $n = 2$: $1^2 + 3^2 + 5^2 = 35 = 8 \times 4 + 3$, c'est-dire que $1^2 + 3^2 + 5^2 \equiv 3$ modulo 3. Le triplet $(1\ ;\ 3\ ;\ 5)$ est donc solution.
2. **a.** Si $n = 3$

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

   Exemple : si $m = 8n + 3$ alors $m^2 = 64n^2 + 48n + 9 = 64n^2 + 48n + 8 + 1 = 8 \times \left(n^2 + 6n + 1\right) + 1 \iff m^2 \equiv 1$ modulo 8.

   b. Les seuls restes possibles sont donc 0, 1 et 4. Avec trois carrés la somme des restes ne peut être que 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, mais pas 7.
   Conclusion : il n'existe pas d'entier $x,\ y,\ z$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8.

Partie B Étude du cas général où $n \geqslant 3$

1. S'il existe trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que
   $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n alors $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n q + 2^n - 1 = 2^n(q+1) - 1$, donc cette somme est impaire. Donc :
   – aucun des trois n'est pair ;
   – il ne peut y avoir un pair et deux impairs car la somme des carrés serait paire ;
   – il peut y avoir deux pairs ;
   – il ne peut y avoir trois pairs, car la somme des carrés serait paire.
2. $x = 2q,\ y = 2r,\ z = 2s + 1$.

a. Donc $x^2+y^2+z^2=4q^2+4r^2+4s^2+4s+1=4\times\left(q^2+r^2+s^2+s\right)+1$.
Conclusion $x^2+y^2+z^2\equiv 1$ modulo 4

b. Or on a supposé que $x^2+y^2+z^2\equiv 2^n-1$ modulo 2^n soit $x^2+y^2+z^2=2^n\times q+2^n-1=4\alpha-1$ (car n est au moins égal à 3).
Ceci est impossible : un multiple de 4 plus 1 ne peut être égal à un multiple de 4 moins 1.
En effet s'il existe α et β tels que :
$8\alpha-1=8\beta+1$ alors $8\alpha-8\beta=2 \iff 4\alpha-4\beta=1$. La différence de deux multiples de 4 ne peut être égale à 1. Conclusion ; il n'existe pas de triplet solution avec un seul impair.

3. On suppose que $x,\ y,\ z$ sont impairs.

a. Pour tout naturel k non nul, $k^2+k=k\times(k+1)$ produit de deux naturels consécutifs : l'un des deux facteurs est pair, donc le produit est pair.

b. Posons : $x=2q+1,\ y=2r+1$ et $z=2s+1$, alors
$x^2+y^2+z^2=4q^2+4q+1+4r^2+4r+1+4s^2+4s+1=\left(4q^2+4q\right)+\left(4r^2+4r\right)+\left(4s^2+4s\right)+3=4\left[\left(q^2+q\right)+\left(r^2+r\right)+\left(s^2+s\right)\right]+3$. Or d'après la question précédente chaque parenthèse est un nombre pair, donc $x^2+y^2+z^2=4\times(2\alpha+2\beta+2\gamma)+3=8(\alpha+\beta+\gamma)+3$ c'est-à-dire que $x^2+y^2+z^2\equiv 3$ modulo 8.

c. Or puisque $n\geqslant 3$ on peut écrire $x^2+y^2+z^2=2^3\times 2^{n-3}q+2^3\times 2^{n-3}-1=2^3a-1=8a-1$. (avec $a\in\mathbb{N}$)
On peut expliciter : s'il existe α et β tels que :
$8\alpha-1=8\beta+3$ alors $8\alpha-8\beta=4 \iff 2\alpha-2\beta=1$. La différence de deux pairs ne peut être égale à 1. Ceci est impossible : Un multiple de 8 plus 3 ne peut être égal à un multiple de 8 moins 1.
Conclusion finale : pour $n>2$ le problème proposé n'a pas de solution.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** L'énoncé dit que $p_1=0,5$, que $p_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{G}_2)=0,7$ et que $p_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{G}_2)=1-0,8=0,2$.

b. Puisqu'il n'y a pas de match nul, on a $p_n+q_n=1$.

c. Pour $n\geqslant 1,\ p_{n+1}=p\left(\mathrm{G}_{n+1}\right)=p_{\mathrm{G}_n}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right)+p_{\mathrm{P}_n}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right)=$
$p_n\times 0,7+\left(1-p_n\right)\times 0,2 \iff p_{n+1}=0,7p_n+0,2-0,2p_n=0,5p_n+0,2$.

2. **a.** On peut écrire par exemple la relation de récurrence précédente
$p_{n+1}=0,5p_n+0,2 \iff p_{n+1}-0,4=0,5p_n+0,2-0,4 \iff$
$p_{n+1}-0,4=0,5p_n-0,2 \iff p_{n+1}-0,4=0,5\left(p_n-0,4\right) \iff$
$v_{n+1}=0,5v_n$.
Cette relation de récurrence montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,5$.
On en déduit que $v_n=v_1\times 0,5^n$. Or $v_1=p_1-0,4=0,5-0,4=0,1$. Donc $v_n=0,2\times 0,5^n$.

b. On en déduit que $p_n=v_n+0,4=p_n=0,4+0,2\times 0,5^n$.

c. Comme $-1<0,5<1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}0,5^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=0,4$.
Cela signifie que sur un grand nombre de parties, Pierre gagnera en moyenne 4 parties sur 10.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats Partie A

1. Soit u telle que $u(x)=x\mathrm{e}^{-x}$; alors $u'(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}$ et $u'+u=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$, donc u est bien une solution de l'équation différentielle (E).

2. $(\mathrm{E}_0) : y'+y=0 \iff y'=-y$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{-x},\ C$ étant un réel quelconque.

3. Une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v' + v = \mathrm{e}^{-x}$. On a vu à la question 1 que u est une telle fonction donc que $u' + u = \mathrm{e}^{-x}$. En calculant la différence membre à membre : $v' - u' + v - u = 0 \iff (v-u)' + (v-u) = 0$, autrement dit, la fonction $v - u$ est solution de E_0.
4. On a donc pour toute solution v de (E), $v - u = C\mathrm{e}^{-x} \iff v = u + C\mathrm{e}^{-x} \iff v = x\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x} \iff v = (x+C)\mathrm{e}^{-x},\ C \in \mathbb{R}$.
5. La solution f_2 prenant la valeur 2 en 0 vérifie $f_2(0) = (0+C)\mathrm{e}^0 = 2 \iff C = 2$.
Conclusion : $f_2(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B

1. – On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+k) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+k)\mathrm{e}^{-x} = -\infty$.
   – On a $f_k(x) = x\mathrm{e}^{-x} + k\mathrm{e}^{-x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$.
   L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à $\mathscr{C}_k$ au voisinage de plus l'infini.
2. On remarque que les fonctions f_k sont toutes les solutions de l'équation différentielle (E), donc $f_k' + f_k = \mathrm{e}^{-x}$. Donc $f_k'(x) = \mathrm{e}^{-x} - f_k(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+k)\mathrm{e}^{-x} = f_k'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-k-x)$.
3. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit $x$réel, le signe de$f_k'(x)$ est celui de $1-k-x$ expression qui s'annule pour $x = 1-k$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{k-1}	$\searrow$	0

Partie C

1. a. $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} = -1 + \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 - 1$.

   b. On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. On pose :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^{n+1} & v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ u'(x) = (n+1)x^n & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

   toutes ces fonctions étant continues, car dérivables. En intégrant par parties :
   $I_{n+1} = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} + (n+1)\displaystyle\int_{-2}^{0} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

   On a donc une relation de récurrence pour le calcul de I_n.

   c. Pour $n = 0$, la relation précédente s'écrit $\mathrm{I}_1 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{I}_0 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 - 1 = -\mathrm{e}^2 - 1$.
   De même avec $n = 1$, on obtient : $\mathrm{I}_2 = (-2)^2\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{I}_1 = 4\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 - 2 = 2\mathrm{e}^2 - 2$.

2. a. D'après A. 5. la fonction représentée est la fonction f_2. Donc $k = 2$.

   b. On a $\mathscr{S} = \displaystyle\int_{-2}^{0} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + 2\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_0 = -\mathrm{e}^2 - 1 + 2\left(\mathrm{e}^2 - 1\right) = \mathrm{e}^2 - 3$ u.a. (environ 4,39 u.a. ce que l'on contrôle sur le dessin)